

# Traitement du signal en HRA

## Problèmes inverses

Eric Thiébaud

Centre Jean-Marie Mariotti  
Centre de Recherche Astronomique de Lyon  
Université Claude Bernard Lyon I  
Ecole Normale Supérieure de Lyon

20 septembre 2006, Porquerolles

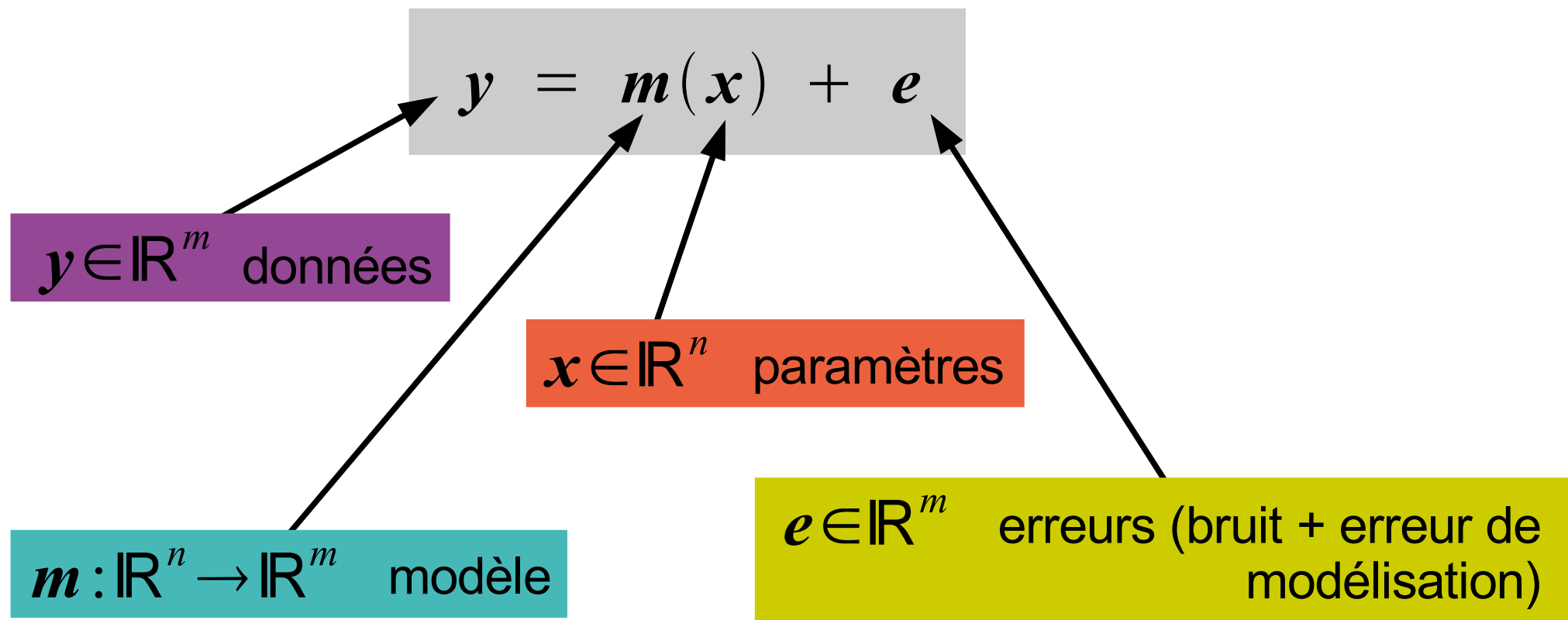
# Contenu

- introduction
  - problème inverse
  - déconvolution directe
- maximum de vraisemblance
  - pourquoi ça ne marche pas ?
- maximum *a posteriori*
  - minimum de variance
  - filtre de Wiener
- généralisation
  - interférométrie optique
  - déconvolution aveugle

# Introduction

# Quelques notations...

équation modèle des observables :



# Exemple : Formation d'image

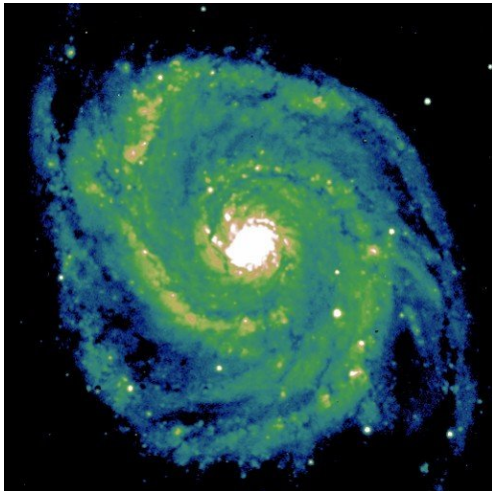
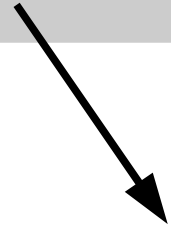
objet

FEP

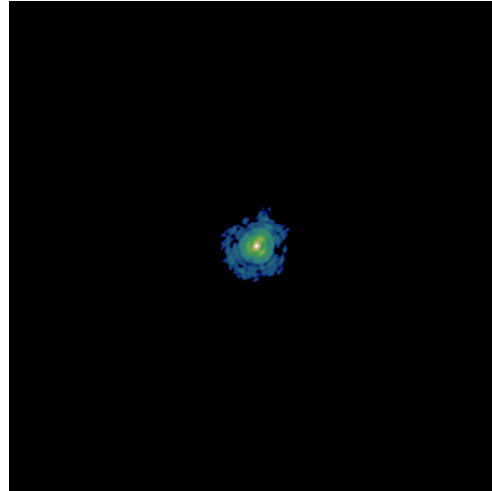
bruit

image  
observée

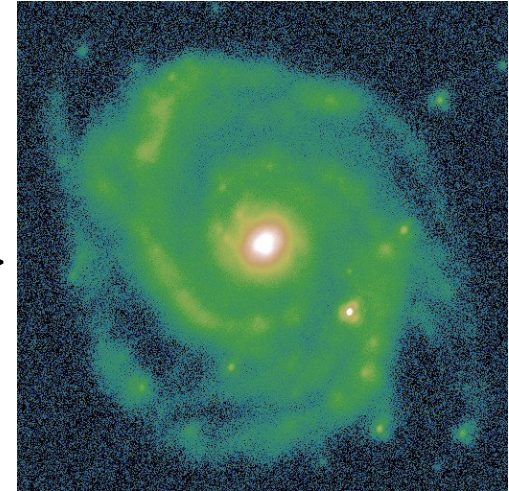
$$\iint x(\omega') h(\omega - \omega') d^2\omega' + e(\omega) = y(\omega)$$



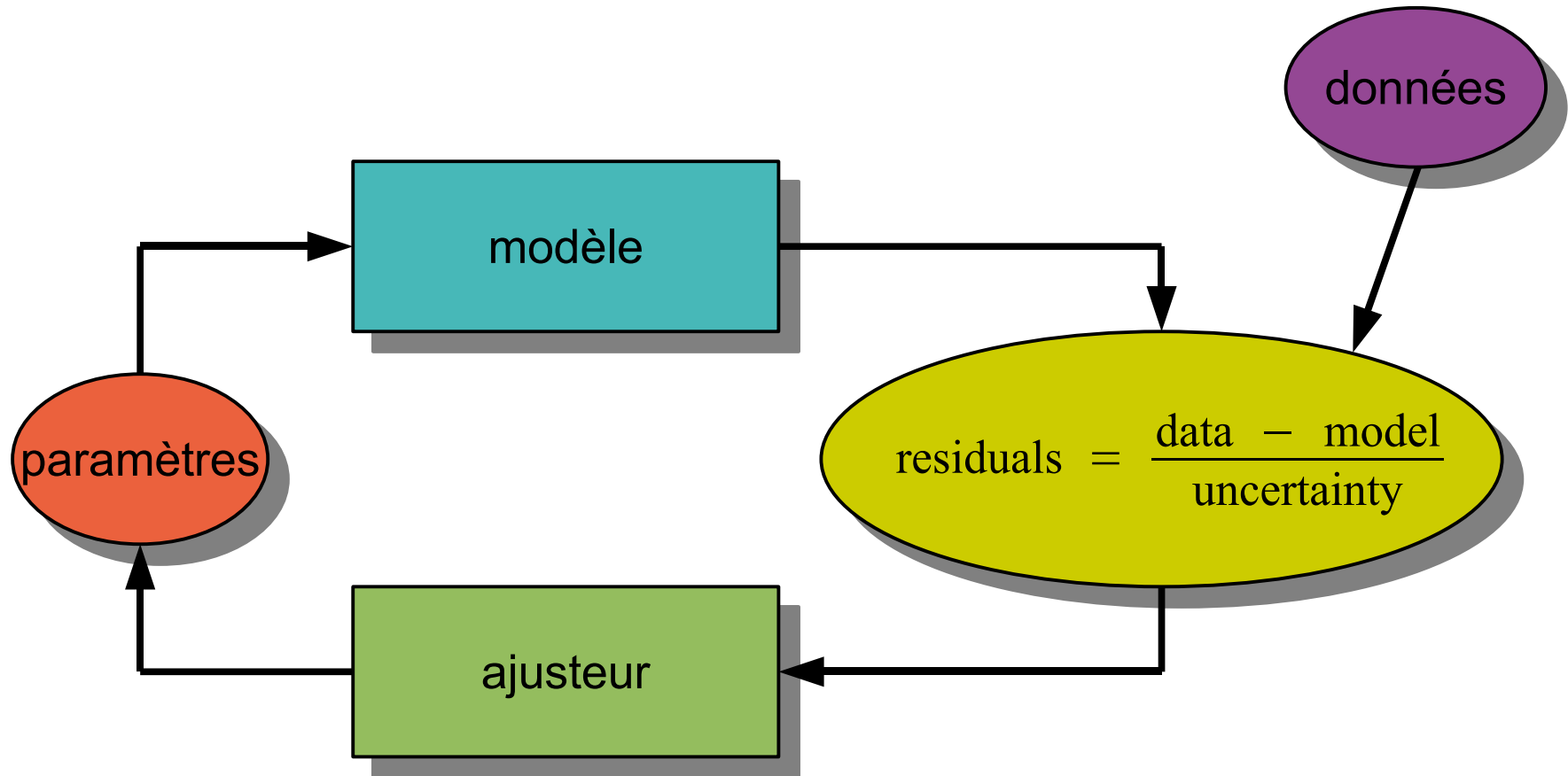
\*



+ bruit



# Problématique



# Paramétrique ou non ?

- ajustement de modèle classique
  - peu de paramètres (*i.e.* **modèle paramétrique**)
  - modèle de l'objet d'intérêt **et** de l'instrument
  - syndrome Mona-Lisa (*cf.* Yves Rabbia)
- problème inverse
  - beaucoup ( $10^9$ ) paramètres (*i.e.* **modèle généraliste** de l'objet, non-paramétrique)
  - moins d'*a priori* mais plus lourd
- pas mal de points communs
  - optimisation, estimation de barres d'erreurs, ...

# La déconvolution c'est facile :

## (1) la théorie

modélisation :

$$y(\boldsymbol{\omega}) = \iint h(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') x(\boldsymbol{\omega}') d^2\boldsymbol{\omega}' + e(\boldsymbol{\omega})$$

transformation de Fourier :

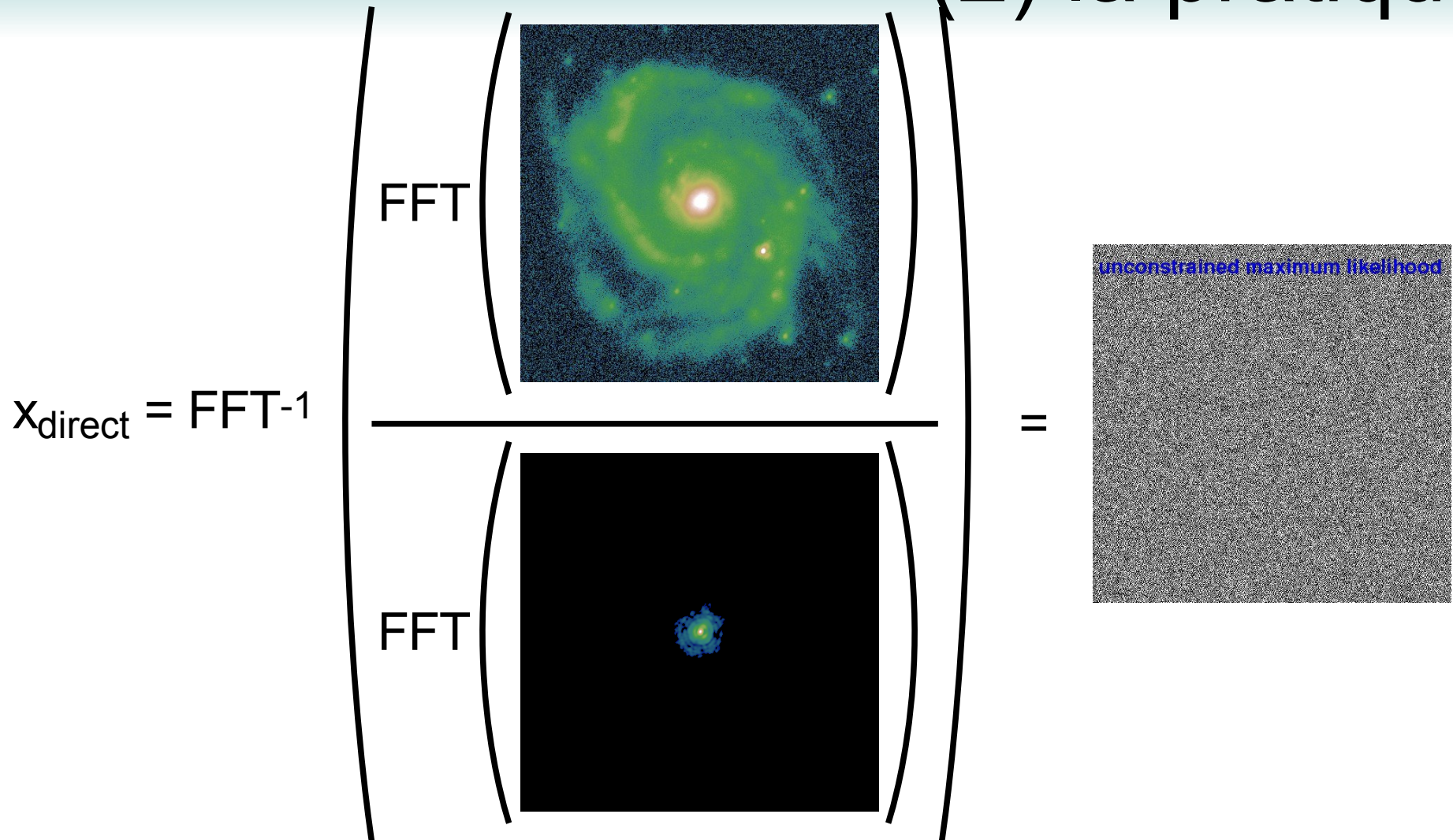
$$\hat{y}(\boldsymbol{\nu}) = \hat{h}(\boldsymbol{\nu}) \hat{x}(\boldsymbol{\nu}) + \hat{e}(\boldsymbol{\nu})$$

inversion :

$$\hat{x}_{\text{direct}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\hat{y}(\boldsymbol{\nu})}{\hat{h}(\boldsymbol{\nu})}$$



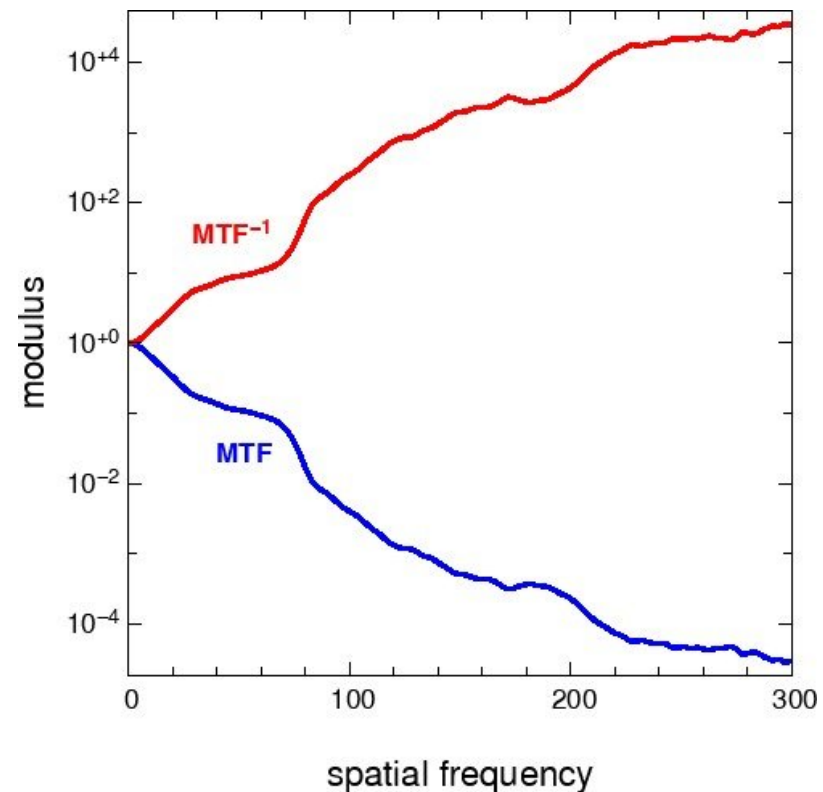
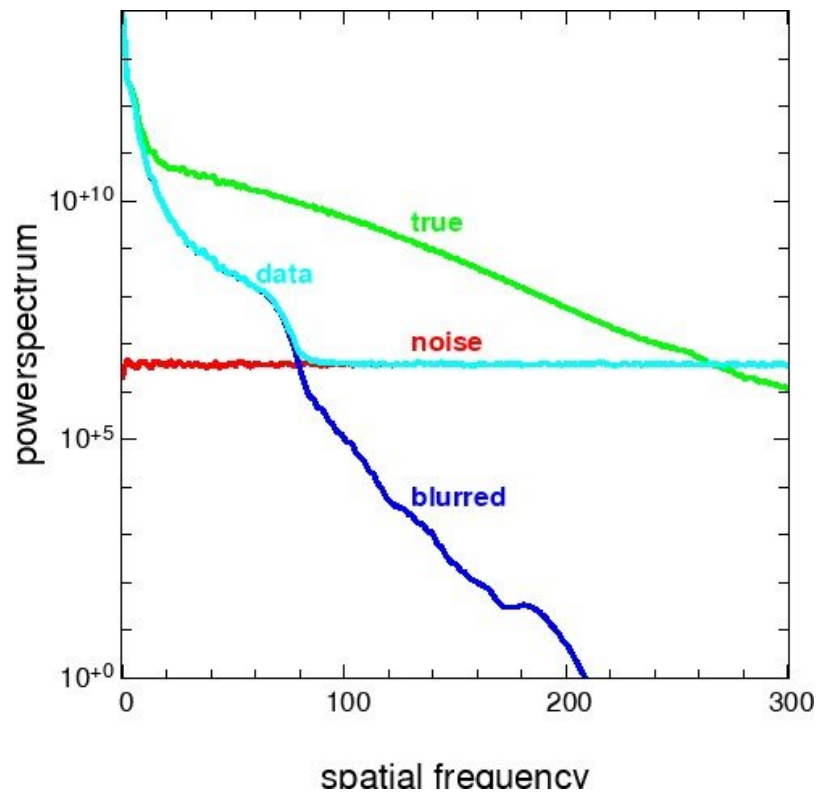
# La déconvolution c'est facile : (2) la pratique



... la déconvolution ça n'est pas si facile que ça !

# Qu'est-ce qui cloche ?

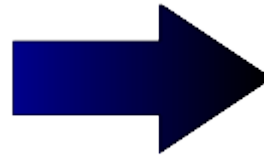
$$\hat{x}_{\text{direct}}(\mathbf{v}) = \frac{\hat{d}(\mathbf{v})}{\hat{h}(\mathbf{v})} = \frac{\hat{h}(\mathbf{v}) \hat{x}(\mathbf{v}) + \hat{e}(\mathbf{v})}{\hat{h}(\mathbf{v})} = \hat{x}(\mathbf{v}) + \frac{\hat{e}(\mathbf{v})}{\hat{h}(\mathbf{v})}$$



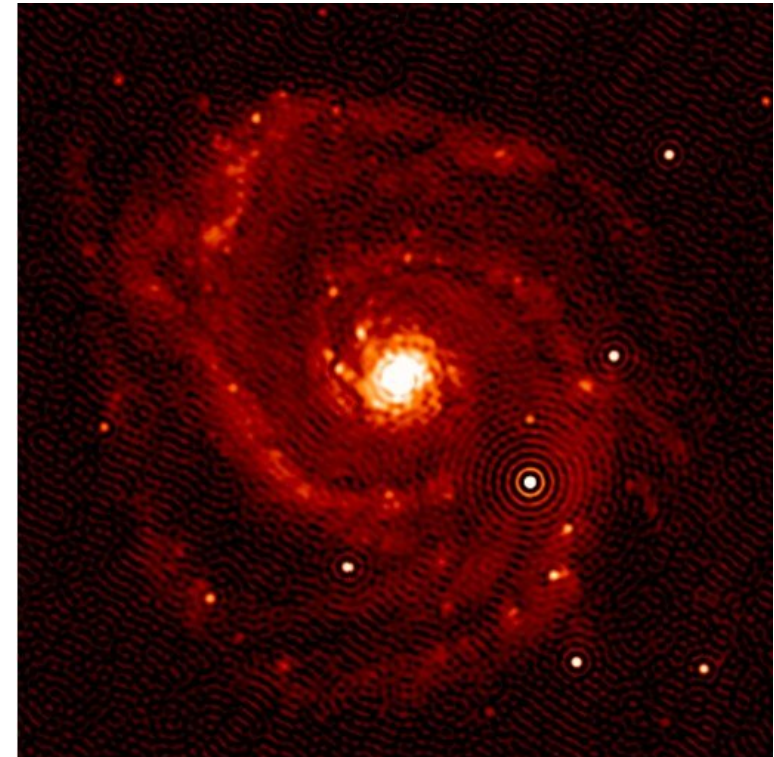
inversion directe (exacte ?) → ***amplification du bruit***

# Solution brutale : troncature

$$\hat{x}_{\text{trunc}}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \frac{\hat{y}(\mathbf{v})}{\hat{h}(\mathbf{v})} & \text{si } |\mathbf{v}| \leq v_{\text{cut}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



avec coupure à  $\approx 80$  fréquences



# maximum de vraisemblance

# Quels sont les meilleurs paramètres ?

⚡ les meilleurs paramètres (au sens du *maximum de vraisemblance*) sont ceux qui maximisent la probabilité d'avoir observé les données :

$$\mathbf{x}_{\text{ML}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y} | \mathbf{m}(\mathbf{x}))$$

où :  $\mathbf{x}$  sont les paramètres  
 $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  est le modèle  
 $\mathbf{y}$  sont les données

de façon équivalente :

$$\mathbf{x}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\text{ML}}(\mathbf{x})$$

avec :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) \propto -\log \Pr(\mathbf{y} | \mathbf{m}(\mathbf{x}))$$

ML = *Maximum Likelihood*

# Bruit gaussien

densité de probabilité :

$$\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{m}(\mathbf{x})) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x}))^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x}))\right)}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{C}_{\text{err}}|}}$$

matrice de covariance :

$$\mathbf{C}_{\text{err}} = \langle (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x}))^T \rangle = \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \rangle$$

fonction de pénalisation :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x}))^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{m}(\mathbf{x}))$$

# Statistique des erreurs

- bruit Gaussien :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}))^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}))$$

- bruit décorrélé :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \sum_k \frac{[y_k - m_k(\mathbf{x})]^2}{\sigma_k^2}$$

- bruit blanc :

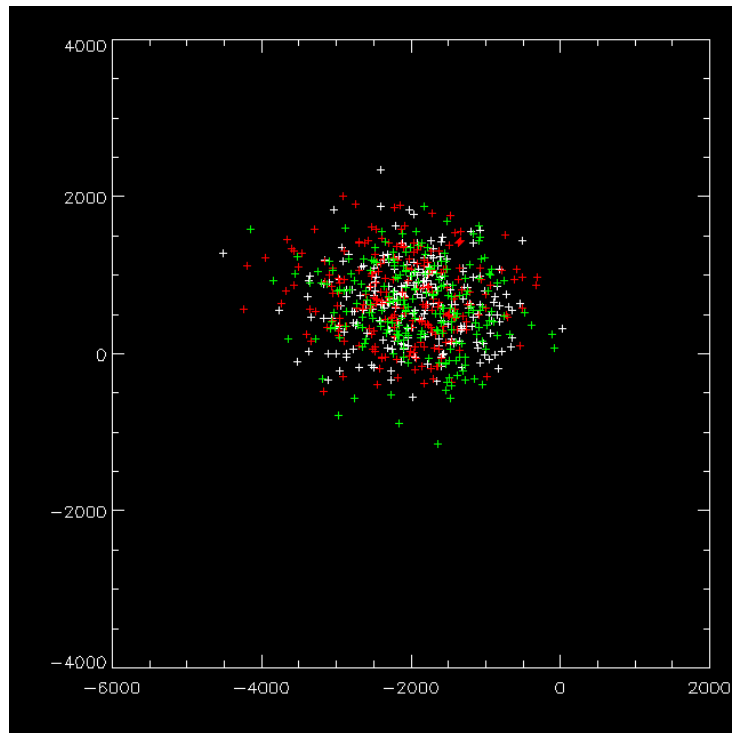
$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_k [y_k - m_k(\mathbf{x})]^2$$

- autres bruits :

- bruit de photon (loi de Poisson)
- mixte (e.g. bruit de photons + bruit de lecture)
- *etc*

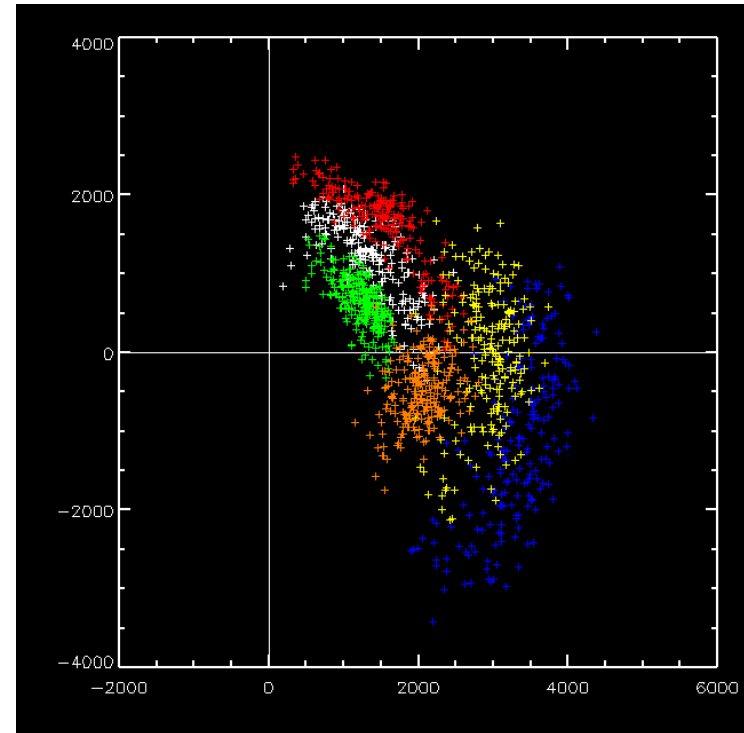
# Erreurs de mesures en interférométrie optique

low SNR



(triple product of FKV0509)

high SNR

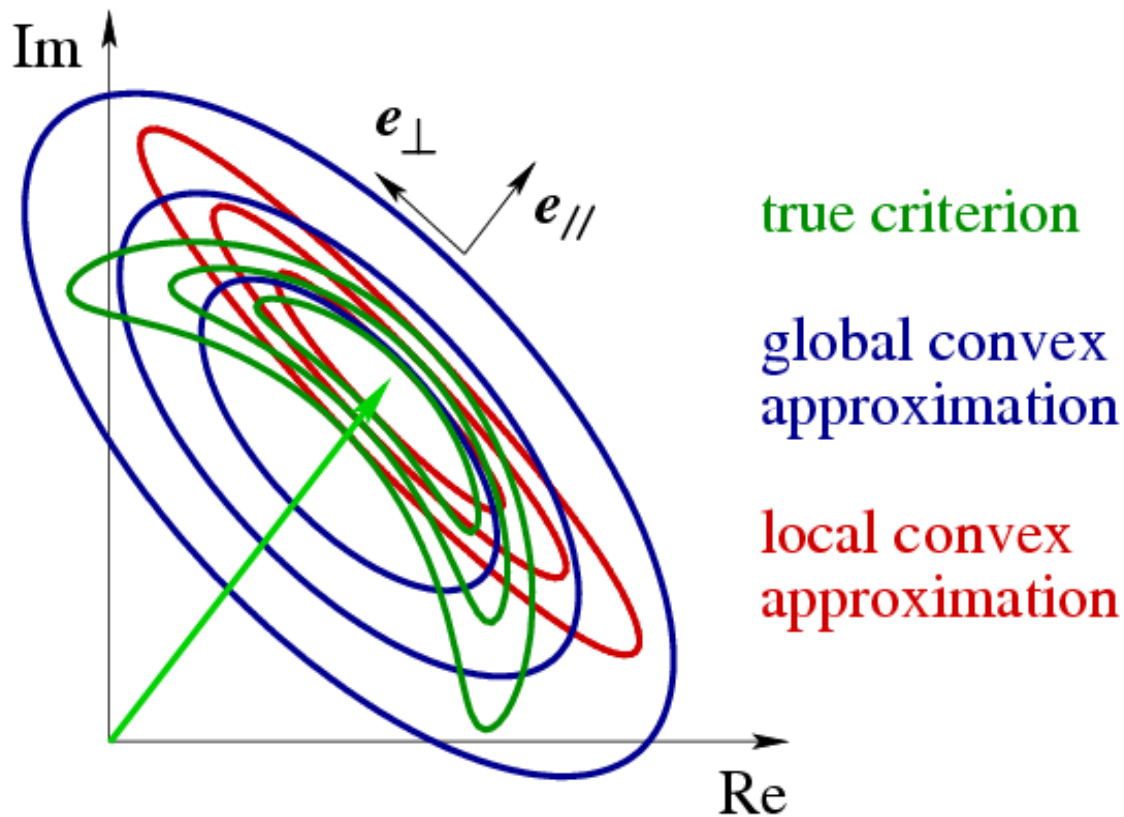


C. Hummel et al.: <http://www.mrao.cam.ac.uk/~jsy1001/exchange/complex/complex.html>



# Critère de vraisemblance

pour des mesures complexes en interférométrie optique :  $\text{Cov}(\rho, \phi) \simeq 0$



(source: S. Meimon, 2006)

$$\chi^2 = \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta \phi \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{\rho}^2 & C_{\rho, \phi} \\ C_{\rho, \phi} & \sigma_{\phi}^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta \phi \end{pmatrix}$$
$$\simeq \frac{\delta \rho^2}{\sigma_{\rho}^2} + \frac{\delta \phi^2}{\sigma_{\phi}^2}$$

# Maximum de vraisemblance : cas gaussien, modèle non-linéaire

- on maximise la probabilité des mesures étant donné le modèle (ML = *maximum likelihood*) :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y} | \mathbf{m}(\mathbf{x})) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} -\log \Pr(\mathbf{y} | \mathbf{m}(\mathbf{x})) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}))^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})) && \text{(bruit gaussien)} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \sum_k \frac{[y_k - m_k(\mathbf{x})]^2}{\sigma_k^2} && \text{(indépendance)} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{\sigma^2} \sum_k [y_k - m_k(\mathbf{x})]^2 && \text{(bruit blanc)}\end{aligned}$$

# Maximum de vraisemblance : cas gaussien, modèle linéaire

- modèle linéaire (discrétisé) :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$$

- solution au sens du maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{ML}} &= \arg \min_{\mathbf{x}} (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}) && \text{(gaussien)} \\ &= \left( \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot \mathbf{M} \right)^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{err}}^{-1} \cdot \mathbf{y} \\ &= \left( \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{M} \right)^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{y} && \text{(indépendance)} \\ &= \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{y} && \text{(\mathbf{M} inversible)}\end{aligned}$$

→ ça ne peut pas marcher (amplification du bruit)

MAP : maximum  
*a posteriori*

# Maximum a posteriori : approche Bayésienne

- on maximise la probabilité du modèle étant donné les mesures (MAP = *maximum a posteriori*) :

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{m}(\mathbf{x})|\mathbf{y})$$

$$= \arg \max_{\mathbf{x}} \frac{\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{x})}{\cancel{\Pr(\mathbf{y})}} \quad (\text{théorème de Bayes})$$

$$= \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \underbrace{-\log \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x})}_{f_{\text{ML}}(\mathbf{x})} - \underbrace{\log \Pr(\mathbf{x})}_{f_{\text{prior}}(\mathbf{x})} \right\}$$

$$= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\text{MAP}}(\mathbf{x})$$

$$f_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) + f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) \quad (\text{fonction pénalisante})$$

# Fonctions pénalisantes

solution MAP :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\text{MAP}}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

fonction pénalisante :

$$f_{\text{MAP}}(\mathbf{x}) = f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) + f_{\text{prior}}(\mathbf{x})$$

terme de vraisemblance :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = -\log \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \text{const.}$$

déjà vu dans « *maximum de vraisemblance* »

terme de régularisation :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = -\log \Pr(\mathbf{x}) + \text{const.}$$

# Régularisations quadratiques

régularisation de Tikhonov :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{x}\|^2 = \mu \sum_k x_k^2$$

contrainte de lissage :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu_1 \sum_{j,k} [x_{j+1,k} - x_{j,k}]^2 + \mu_2 \sum_{j,k} [x_{j,k+1} - x_{j,k}]^2$$

*a priori* gaussien :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

→ il existe une solution analytique (si bruit gaussien)

# Maximum a posteriori : approximation gaussienne, modèle linéaire

modèle linéaire (discrétisé) :  $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}$

vraisemblance gaussienne :  $f_{\text{ML}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{error}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})$

*a priori* gaussien :  $f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^T \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$

→ solution analytique :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}_{\text{prior}} + (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{error}}^{-1} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{error}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}}) \\ &= \mathbf{x}_{\text{prior}} + \mathbf{C}_{\text{prior}} \cdot \mathbf{M}^T \cdot (\mathbf{C}_{\text{error}} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_{\text{prior}} \cdot \mathbf{M}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}})\end{aligned}$$



# Filtrage de Wiener

$$\mathbf{x}_{\text{MAP}} = \mathbf{x}_{\text{prior}} + (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{error}}^{-1} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C}_{\text{prior}}^{-1})^{-1} \cdot \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{error}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

réponse stationnaire (e.g. convolution par PSF)

covariances stationnaires

signal centré (a priori) :

$$\mathbf{x}_{\text{prior}} = \langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{0}$$

→ solution analytique :

$$\hat{x}_{\text{MAP}}(\mathbf{v}) = \frac{\hat{h}^*(\mathbf{v}) \hat{y}(\mathbf{v})}{|\hat{h}(\mathbf{v})|^2 + \frac{\langle |\hat{e}(\mathbf{v})|^2 \rangle}{\langle |\hat{x}(\mathbf{v})|^2 \rangle}}$$

(filtre de Wiener)

# Filtrage de Wiener

filtre de Wiener *canonique* (MAP)

$$\hat{x}_{\text{MAP}}(\mathbf{v}) = \frac{\hat{h}^*(\mathbf{v}) \hat{y}(\mathbf{v})}{|\hat{h}(\mathbf{v})|^2 + \frac{\langle |\hat{e}(\mathbf{v})|^2 \rangle}{\langle |\hat{x}(\mathbf{v})|^2 \rangle}}$$

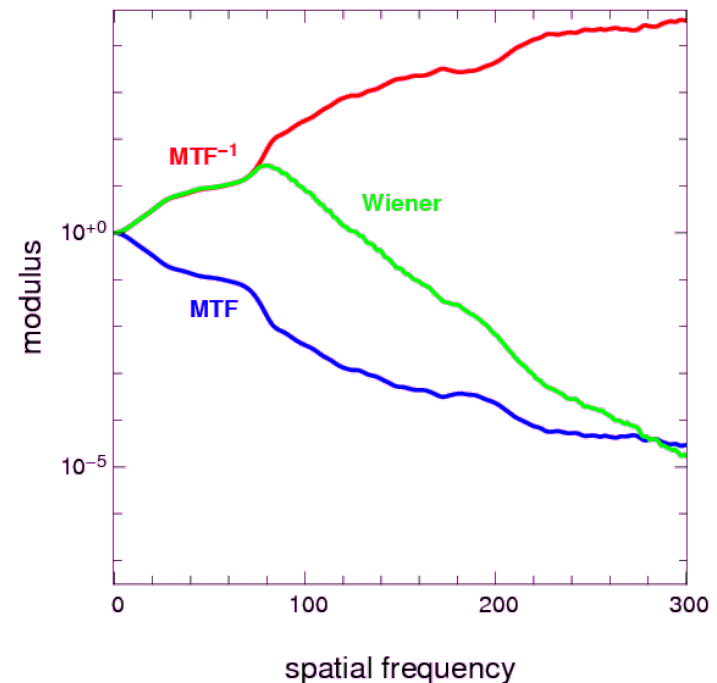
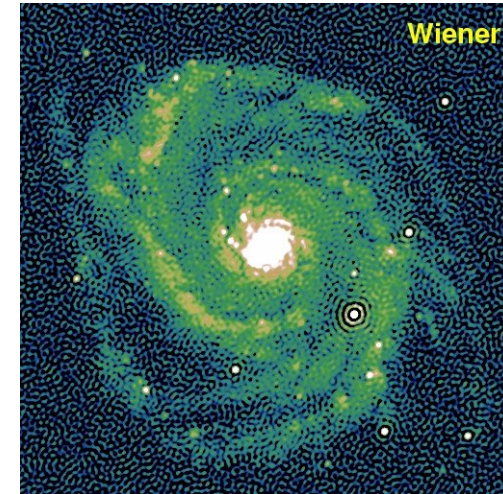
filtre de Wiener approché

$$\hat{x}_{\text{MAP}}(\mathbf{v}) \simeq \frac{\hat{h}^*(\mathbf{v}) \hat{y}(\mathbf{v})}{|\hat{h}(\mathbf{v})|^2 + \mu |\mathbf{v}|^\beta}$$

$$\Leftrightarrow f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_u w_u |\hat{x}_u|^2$$

$$\text{avec } \alpha = \mu \sigma^2 N_{\text{pix}}$$

$$\text{et } w_u = |\mathbf{u}|^\beta$$



# Régularisations non-quadratiques

maximum d'entropie (avec *a priori*  $\mathbf{p}$ ) :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_k \left[ p_k - x_k + x_k \log(x_k / p_k) \right]$$

lissage avec préservation de bords (norme  $\ell_2$ - $\ell_1$ ) :

$$f_{\text{prior}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_k q(x_{k+1} - x_k)$$

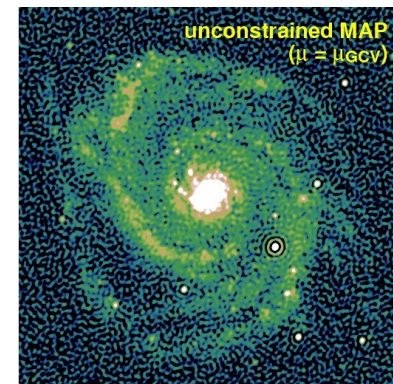
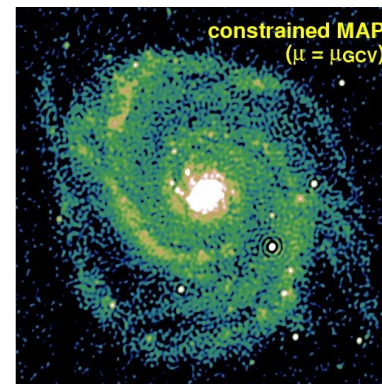
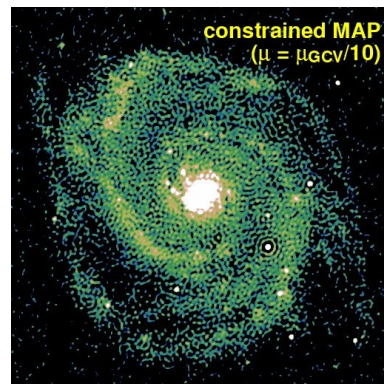
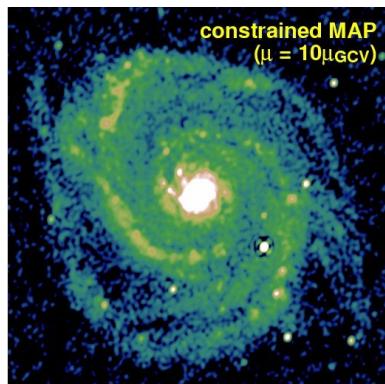
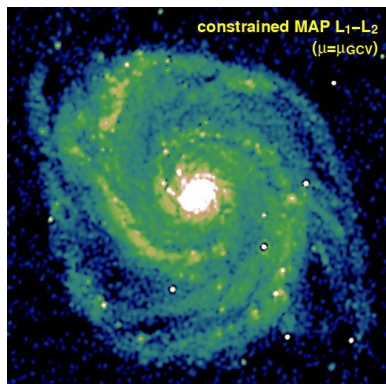
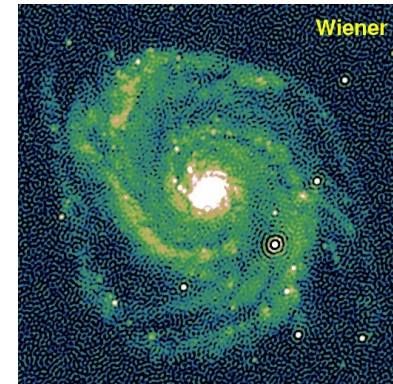
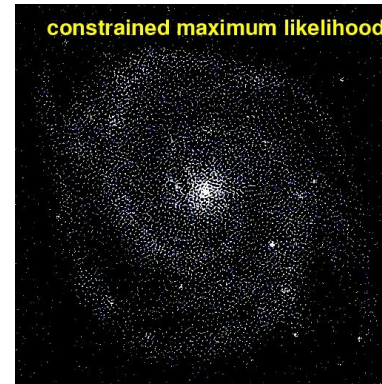
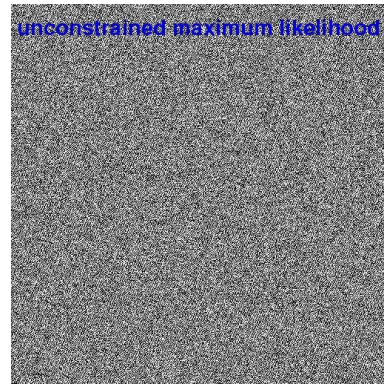
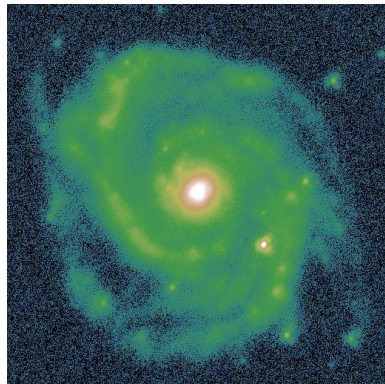
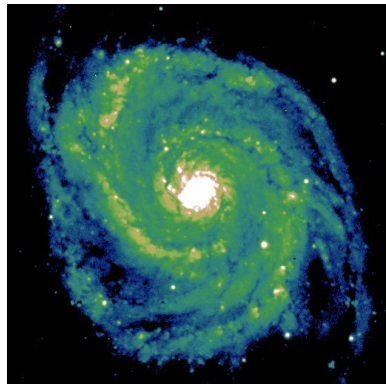
$$q(\Delta x) = 2 \epsilon^2 \left[ |\Delta x / \epsilon| - \log(1 + |\Delta x / \epsilon|) \right] \begin{array}{l} \simeq_{|\Delta x| \ll \epsilon} \Delta x^2 \\ \simeq_{|\Delta x| \gg \epsilon} 2 \epsilon |\Delta x| \end{array}$$

→ il existe n'existe pas (en général) de solution analytique



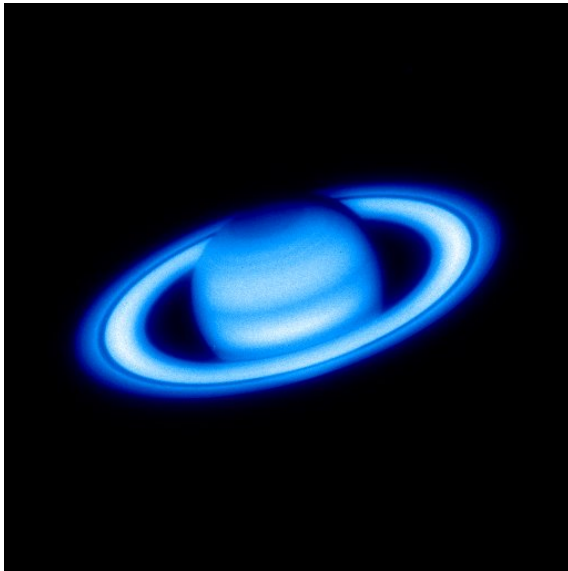
# Résultats des méthodes de déconvolution

Richardson-Lucy



# Image HST de Saturne

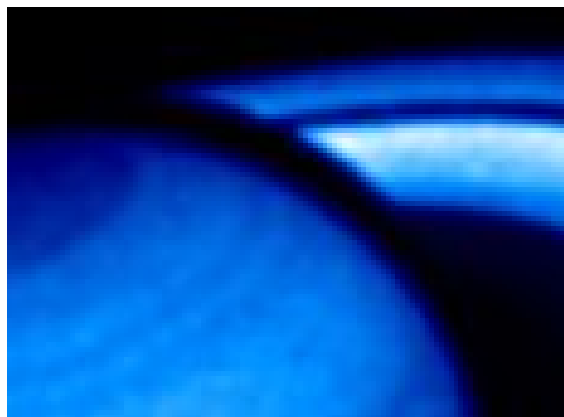
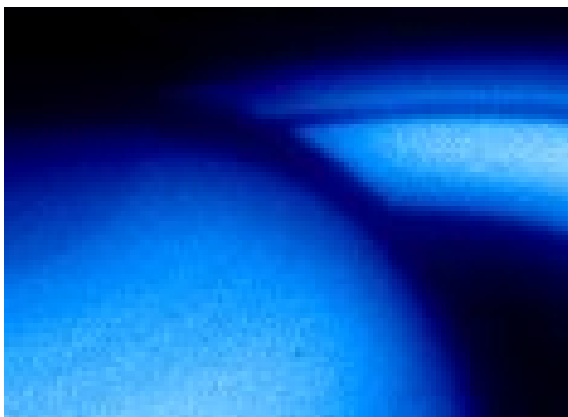
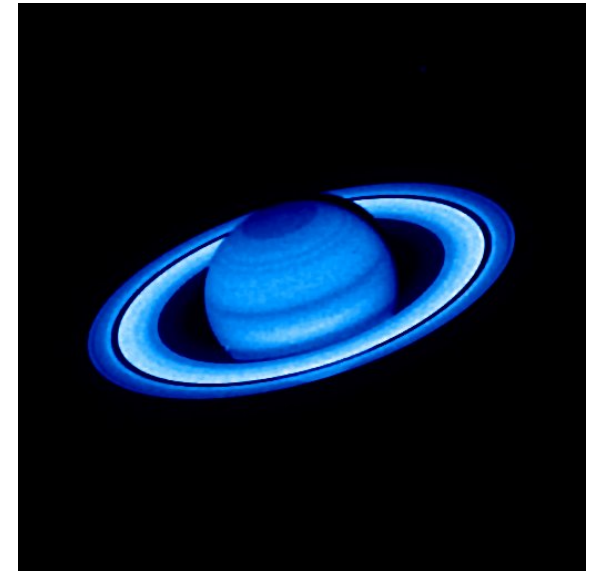
image brute



régularisation  
quadratique ( $\ell_2$ )



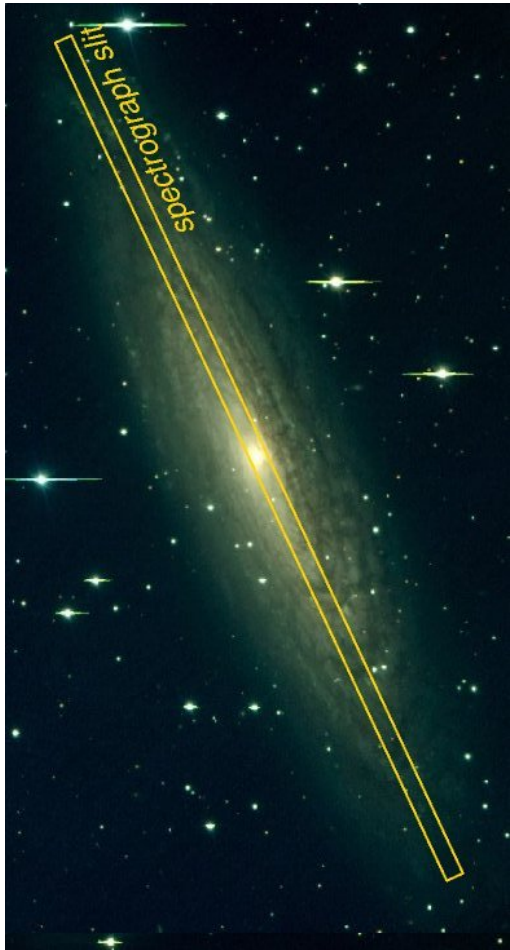
régularisation  $\ell_2$ - $\ell_1$



# du bon usage de la régularisation



# Dynamique dans un disque galactique mince



**observables** : LOSVD's

→ distribution des vitesses (cinématique)  $F_{\phi}(R, v_{\phi})$

**inconnues** : distribution des orbites  $f(\epsilon, R, v_{\phi})$

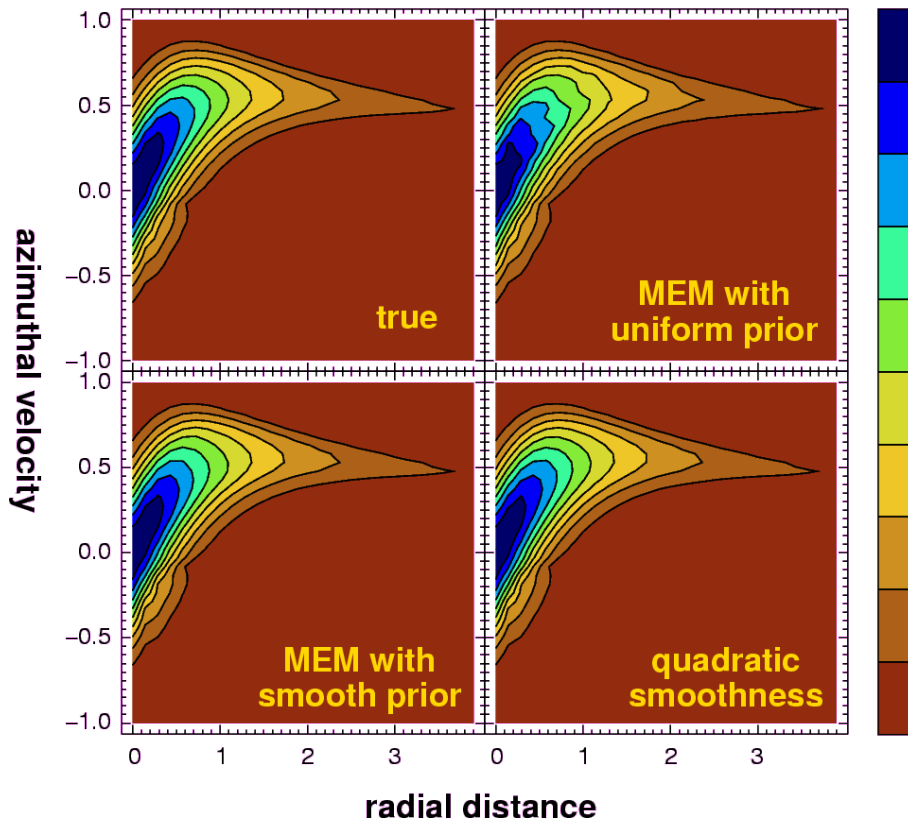
**hypothèses** :

- disque mince (équation d'Abel)
- cinématique du gaz HI
- potentiel gravitationnel  $\psi(R)$

$$F_{\phi}(R, v_{\phi}) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_{\phi}^2 - \psi(R)}^0 \frac{f(\epsilon, R, v_{\phi})}{\sqrt{\epsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_{\phi}^2}} d\epsilon$$

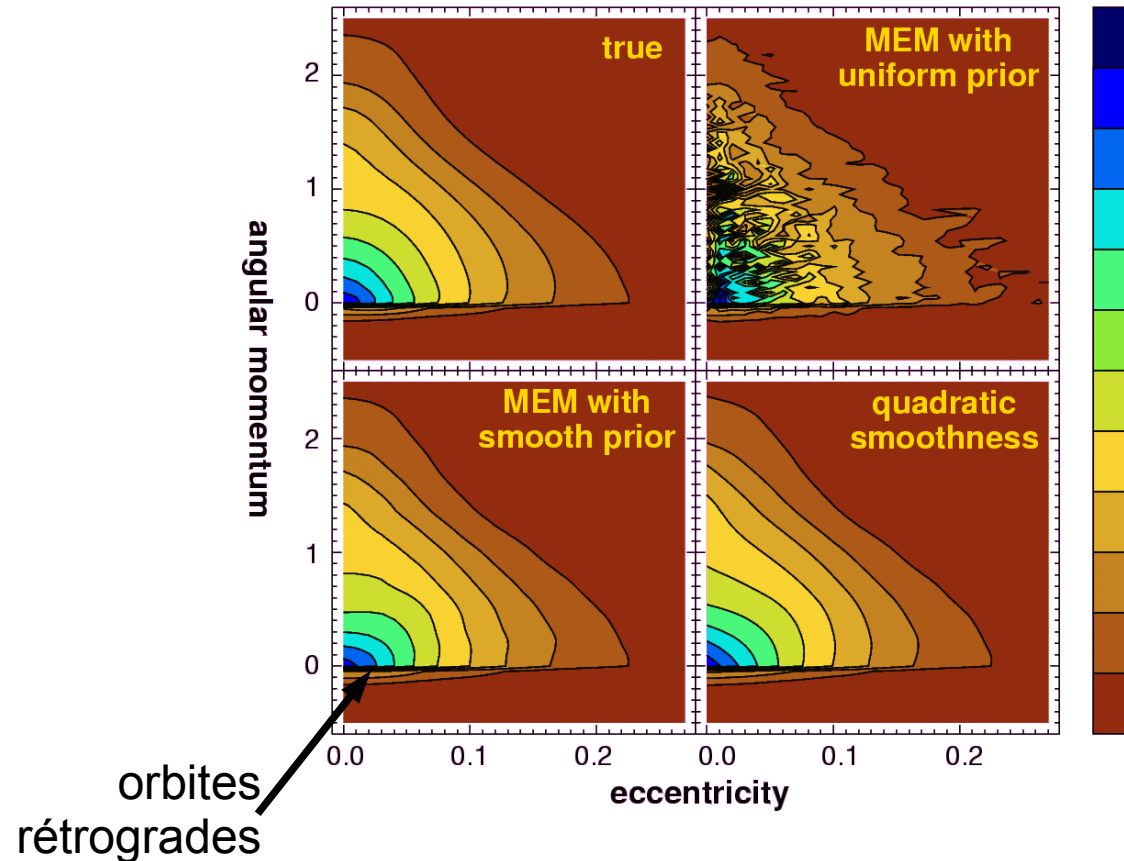
# Pertinence du *type* de régularisation

Observable Distribution Function



**observables :**  $F_{\phi}(R, v_{\phi})$

Orbit Distributions



**paramètres :**  $f(\epsilon, R, v_{\phi})$

Pichon & Thiébaud (1998)



# Réglage de la régularisation

- $\mu$  est un multiplicateur de Lagrange tel que :

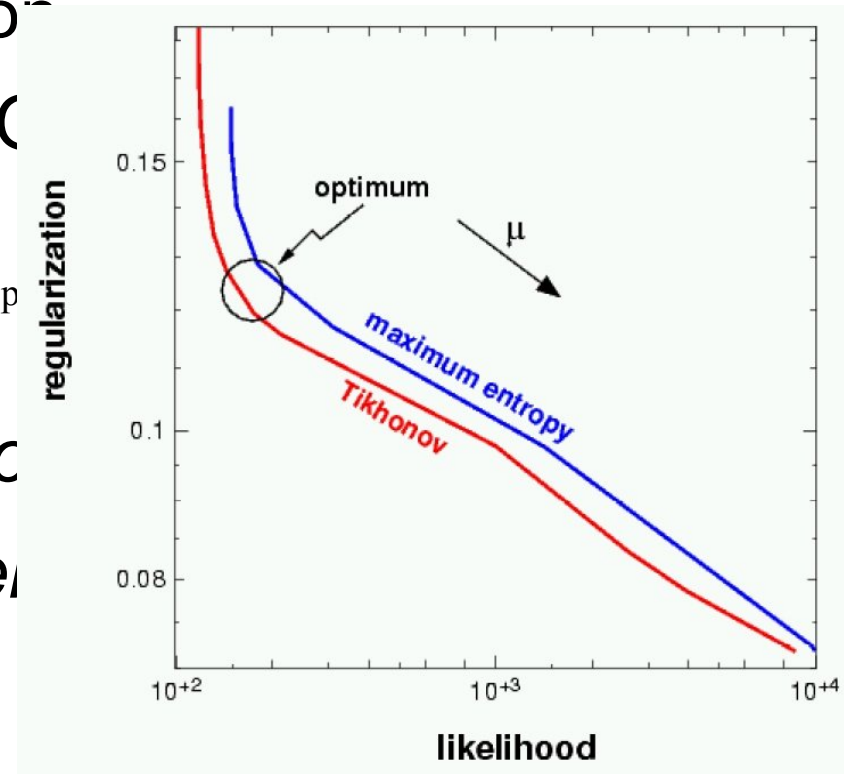
$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}_\mu) = \sum_k \frac{[y_k - m_k(\mathbf{x}_\mu)]^2}{\sigma_k^2} \simeq N_{\text{data}}$$

– tendance à ***trop lisser*** la solution

- *equivalent degrees of freedom* (C

$$f_{\text{MAP}}(\mathbf{x}_\mu) = f_{\text{ML}}(\mathbf{x}_\mu) + \mu f_p$$

- GCV (*generalized cross-validation*)
- GML (*generalized maximum likelihood*)
- L-curve (Hansen), etc



# Régularisation

- choix de la régularisation : ce qui compte c'est le type d'*a priori* (e.g. lissage, ...)
  - Wiener  $\sim$  MAP avec lissage quadratique
  - dynamique dans disque galactique mince
    - lissage + séparation des orbites rétrogrades
- généralisation de la régularisation
  - pas nécessairement une log-probabilité
  - préservation des discontinuités
- réglage de la régularisation
  - méthodes automatiques (GCV, etc)
  - aspect quantitatif (résolution effective)

# C'est photométrie ?

- a priori → **biaise la solution**
- Peut-on utiliser une image reconstruite pour mesurer des paramètres physiques ou pour un ajustement de modèle ?
  - cas non-paramétrique : oui (attention quand même)
  - modèle paramétrique ne marche que si le modèle est le bon (*cf.* le syndrome Mona-Lisa de Yves Rabbia)
- Un biais est acceptable s'il est petit (négligeable) devant les incertitudes.
- MAP ~ MV (minimum de variance)
  - **MAP donne le meilleur compromis biais/erreur**

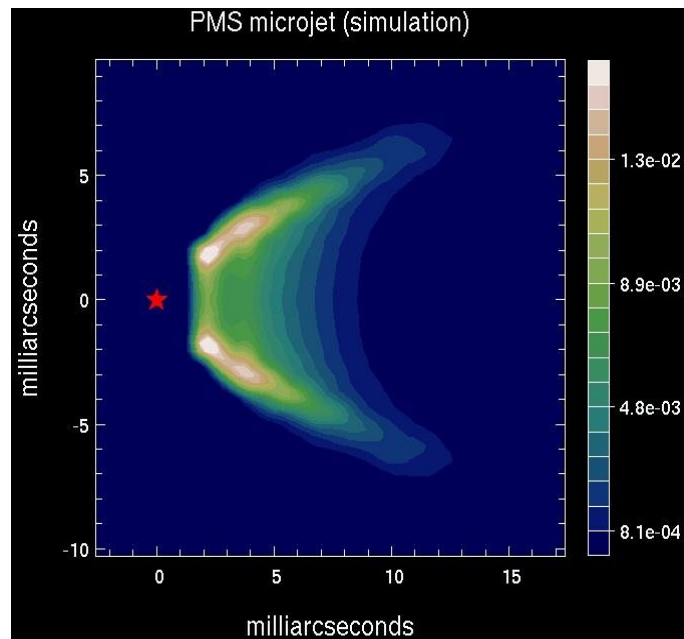
# Interférométrie optique

# Imagerie en interférométrie optique : difficultés et solutions

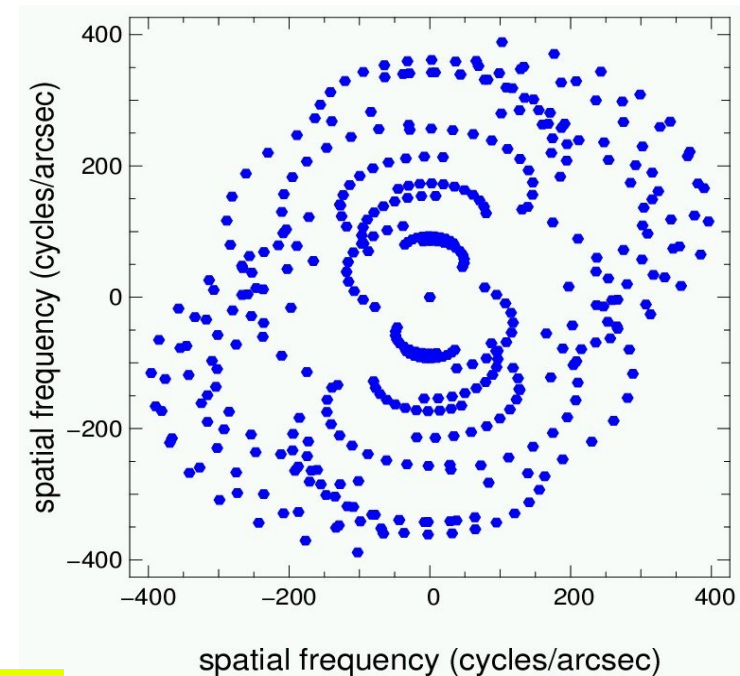
- 1/ reconstruction d'image traitée comme un **problème inverse** :
  - ▶ solution obtenue par optimisation d'un critère de sélection
  - ▶ **optimisation non-linéaire sous contraintes** (à grand nombre de variables)
  
- 2/ **régularisation** nécessaire pour compenser les **données manquantes** et éviter les **fausses structures** dues à l'échantillonnage (u,v)
  - ▶ résultat **biaisé** vers l'a priori (*important pour interprétation correcte des images reconstruites*)
  
- 3/ optical/IR aperture synthesis imaging with few (3-4) telescopes
  - ◆ **weakness** of the measured Fourier information
  - ◆ **phase closures** (some unknown phases)
  - ◆ **self-calibration** (radio-astronomie)
  - ◆ directly fit phase closures and power spectrum data (**MIRA**)
  - ◆ non-convex penalty ▶ multiple local minima
  - ◆ very difficult to solve: **needs global optimization**

# Simulation d'une étoile jeune

micro-jet émis par une étoile jeune  
(modèle par P. Garcia et al.)

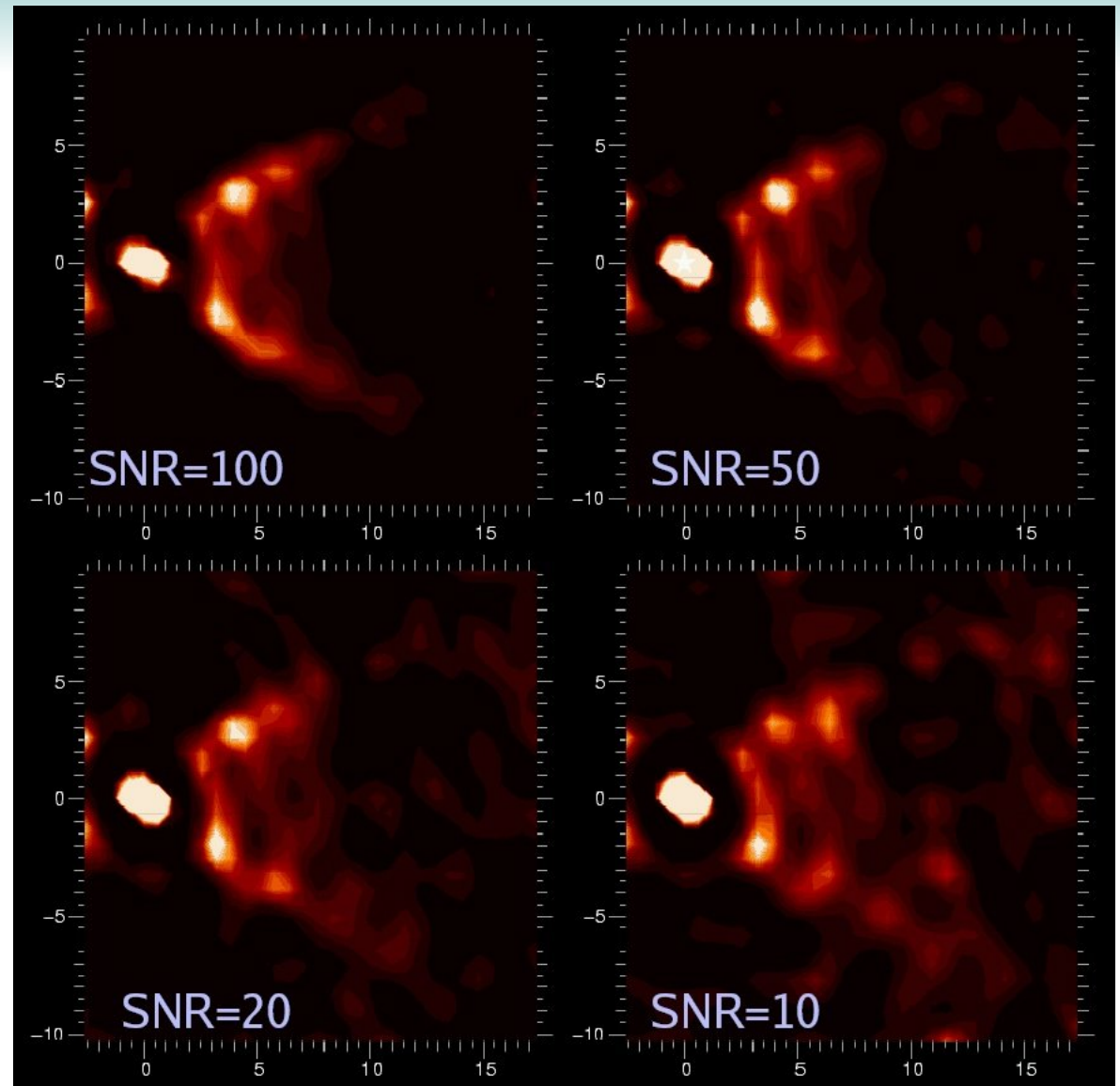
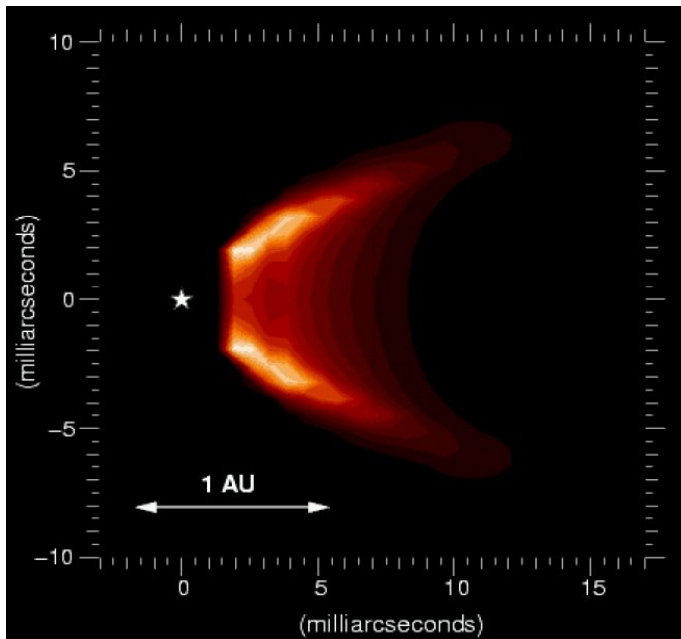


(u,v) coverage



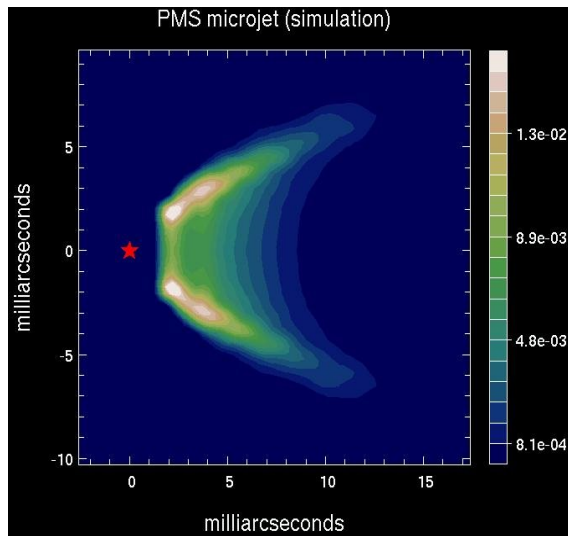
- ♦ 6 observing nights
- ♦ 6 configurations with 3 AT's
- 190 powerspectrum data
- 63 phase closures
- **1024 unknowns**

# Mauvais type de régularisation

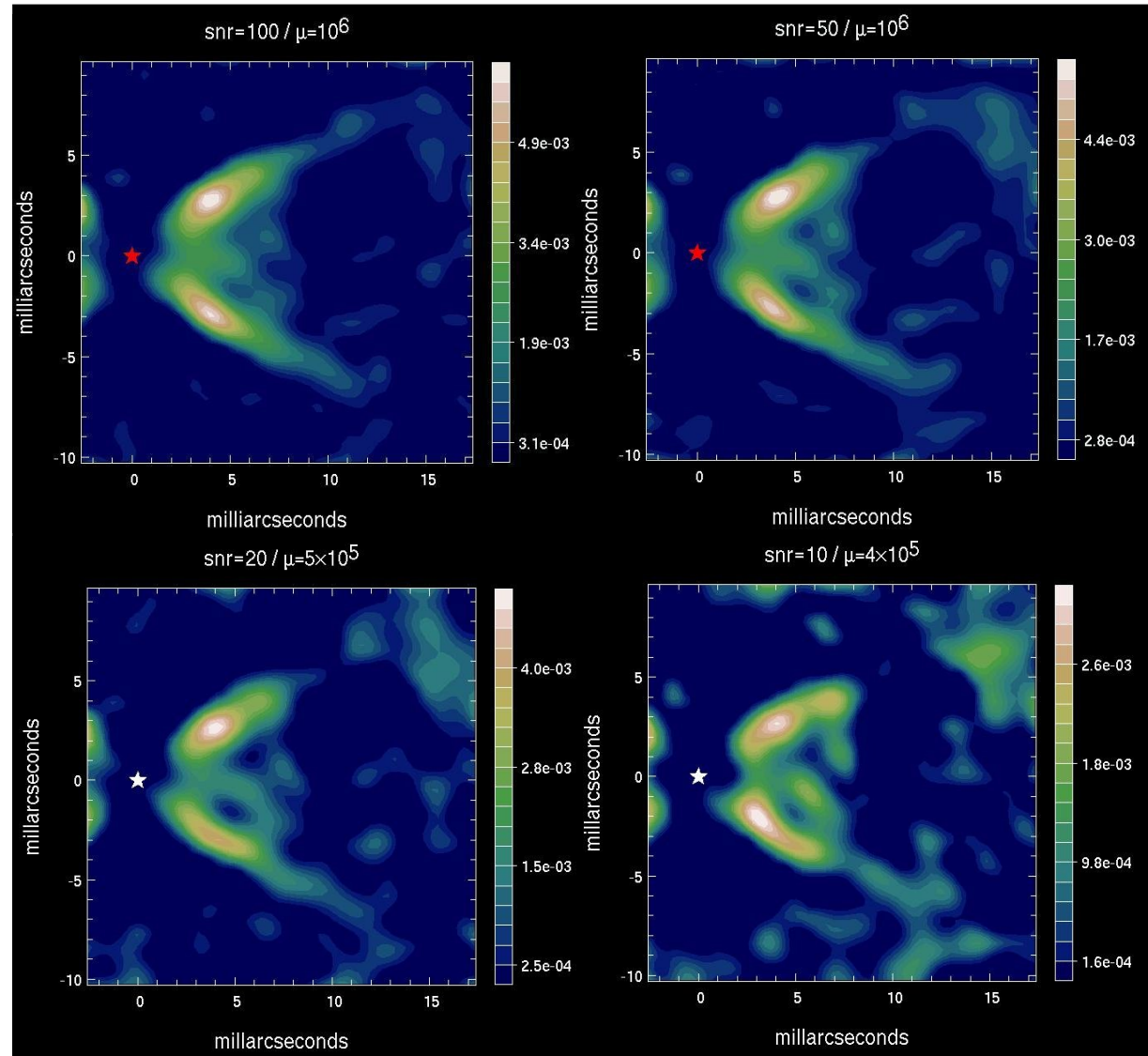




# Niveau de bruit variable

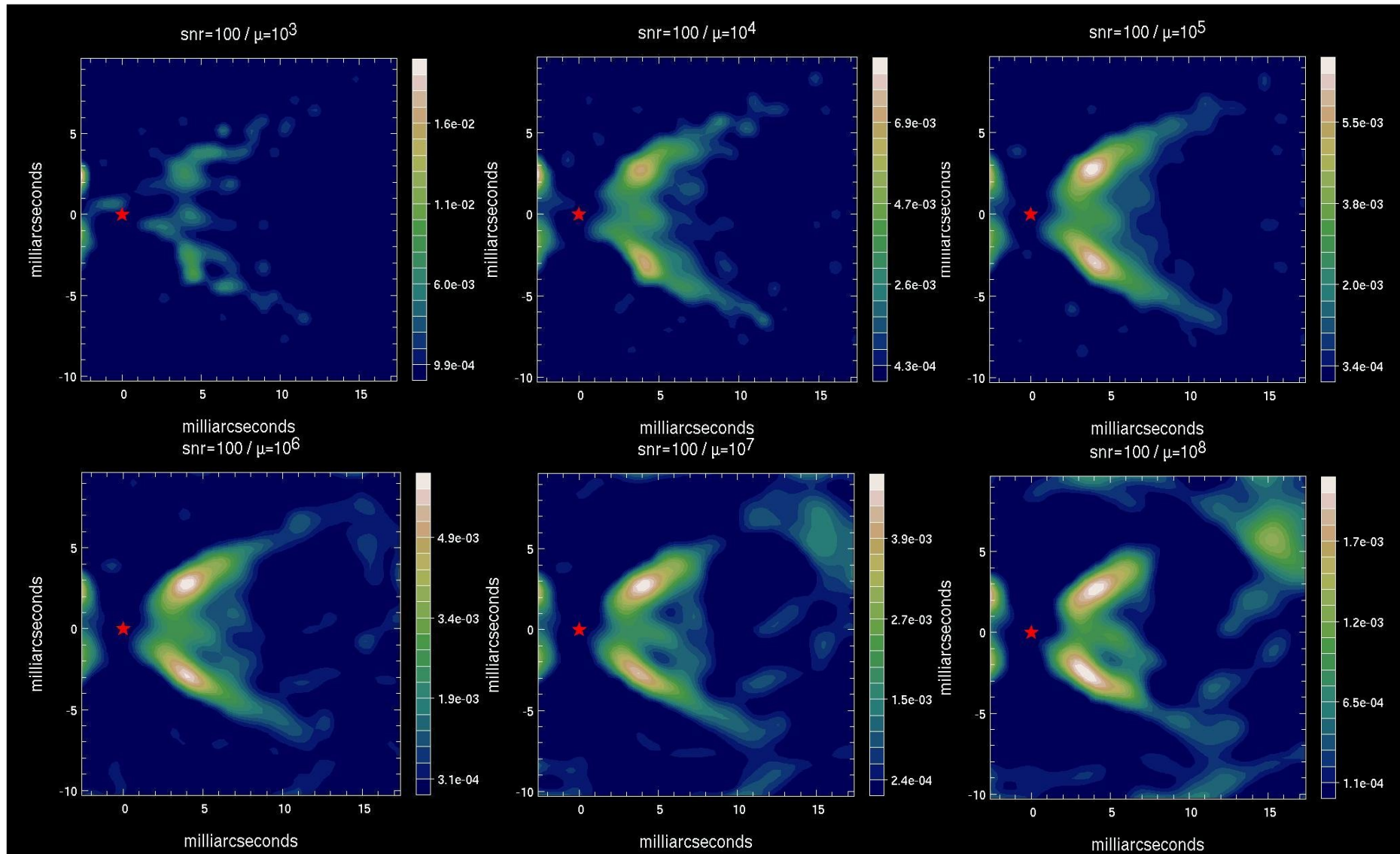


- ✓ micro-jet identifiable
- ✓ angle peut être mesuré
- ✓ seulement optimisation locale
- ✓ super-résolution (x4)



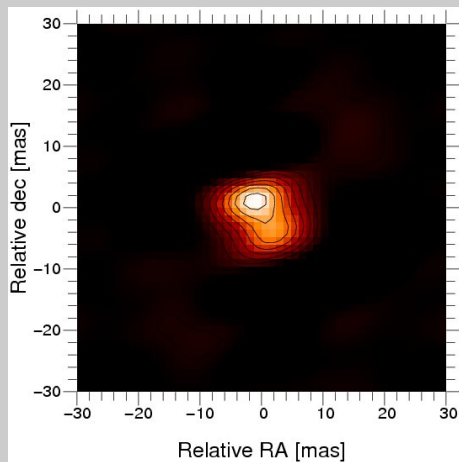
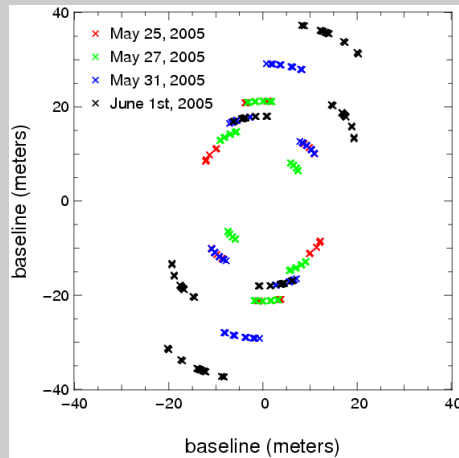


# Effet du niveau de régularisation

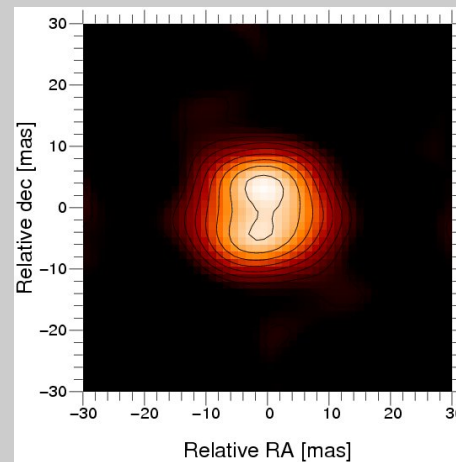


# Interférométrie optique avec de *vraies* données

## Chi-Cygni

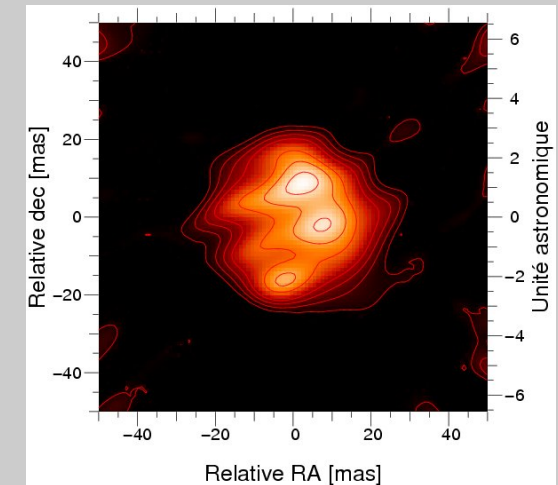


(mai-juin 2005)



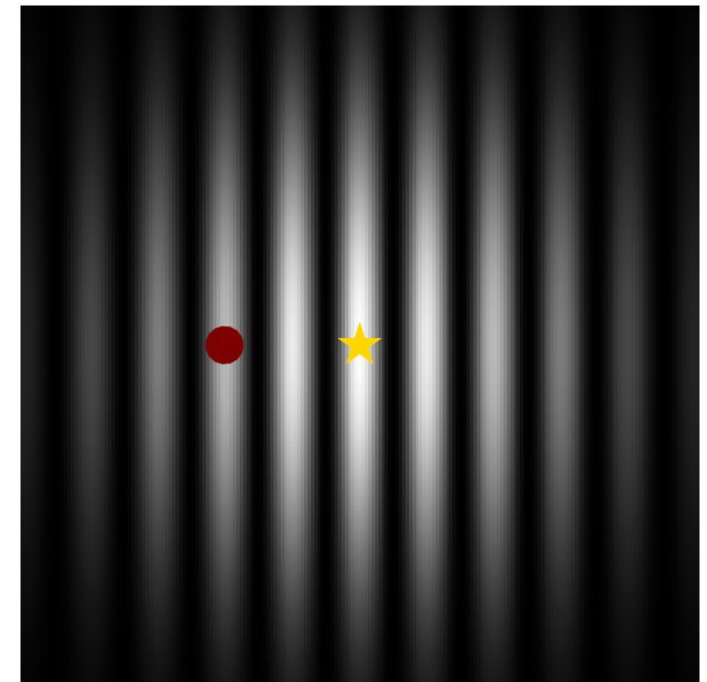
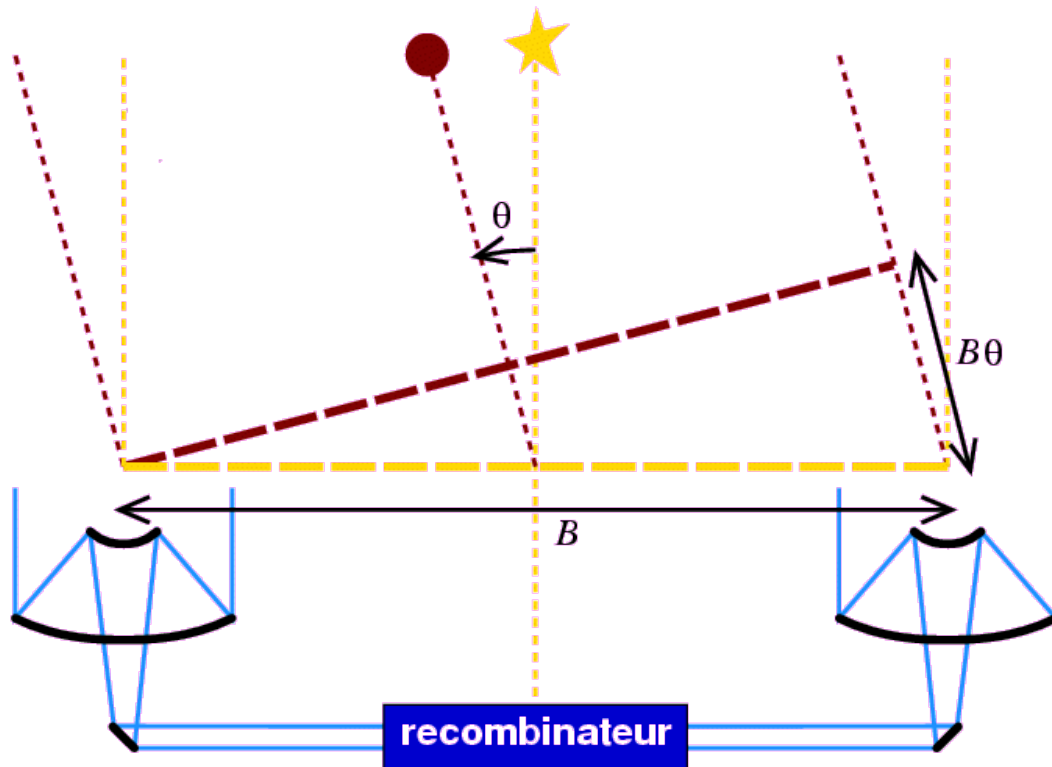
(octobre 2005)

## Bételgeuse

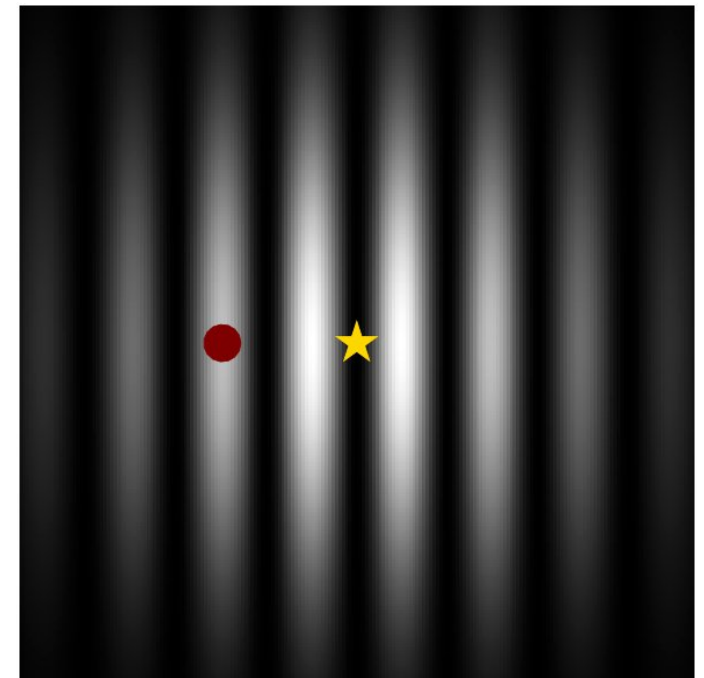
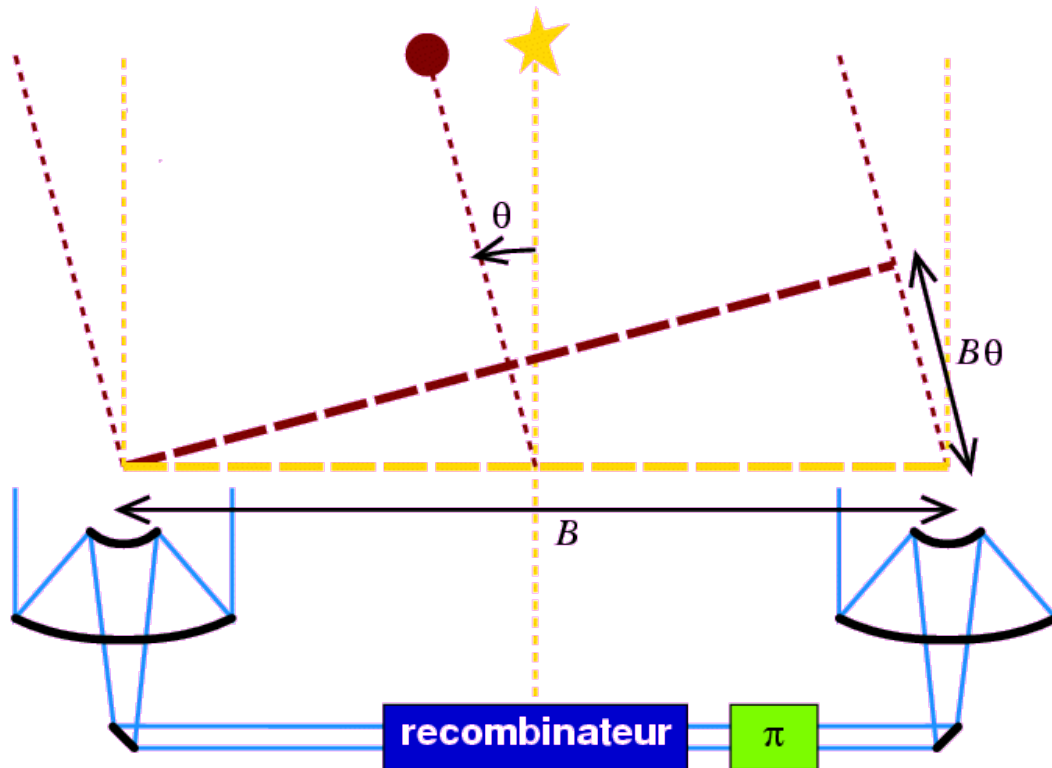


(source : S. Lacour, instrument : IOTA, bande H :  $1,65\mu\text{m}$ , algorithme : MIRA)

# Interféromètre *classique*



# Interféromètre de Bracewell

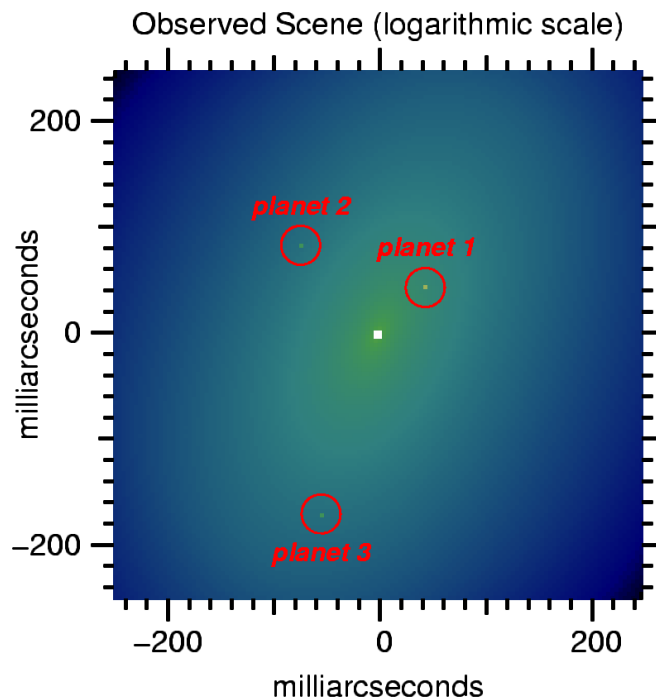


# Darwin

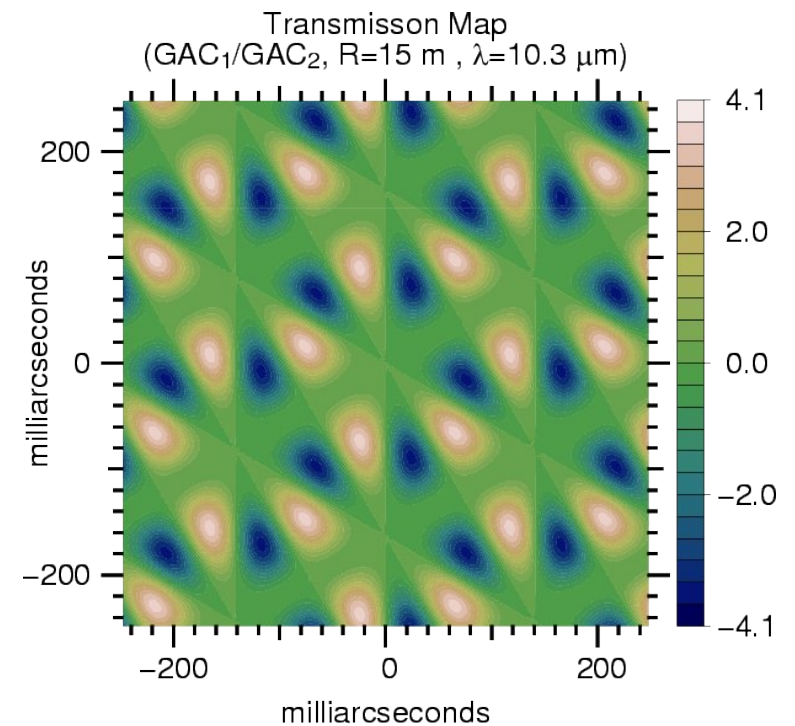


$$A(\lambda, t) = \int R(\omega, \lambda, t) F(\omega, \lambda, t) d\omega$$

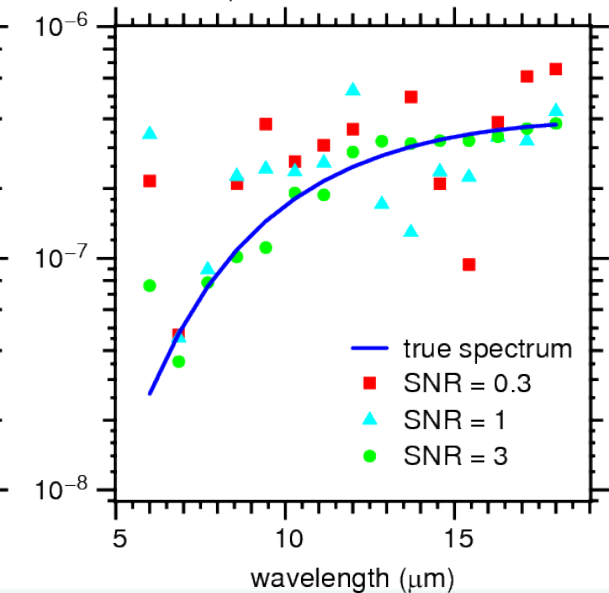
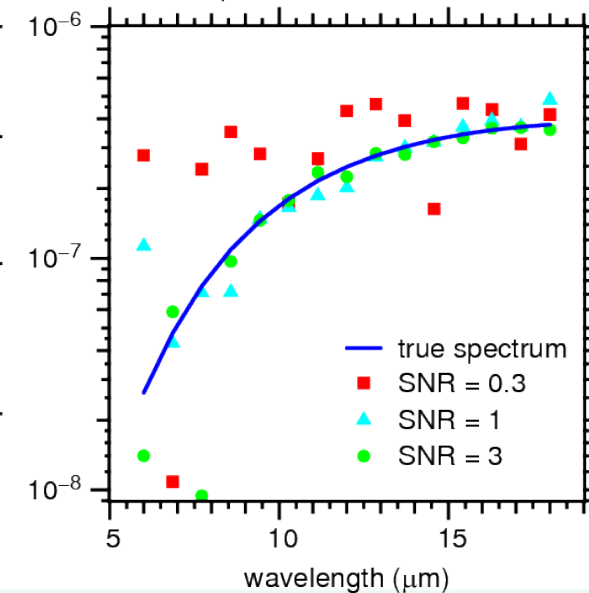
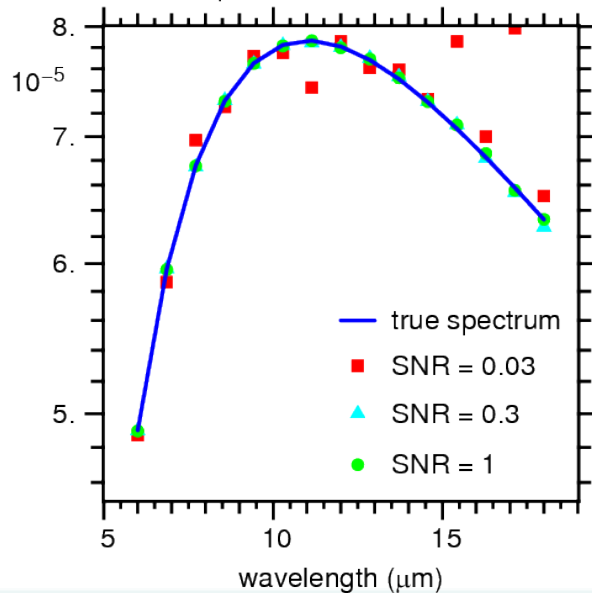
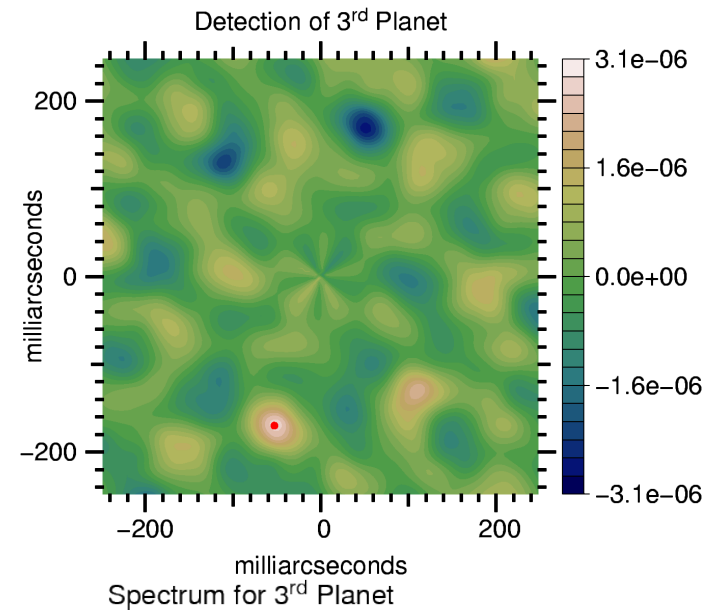
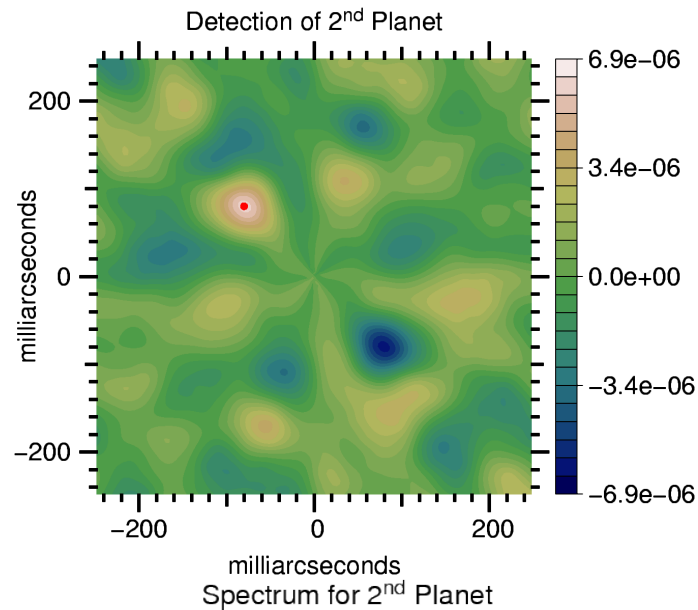
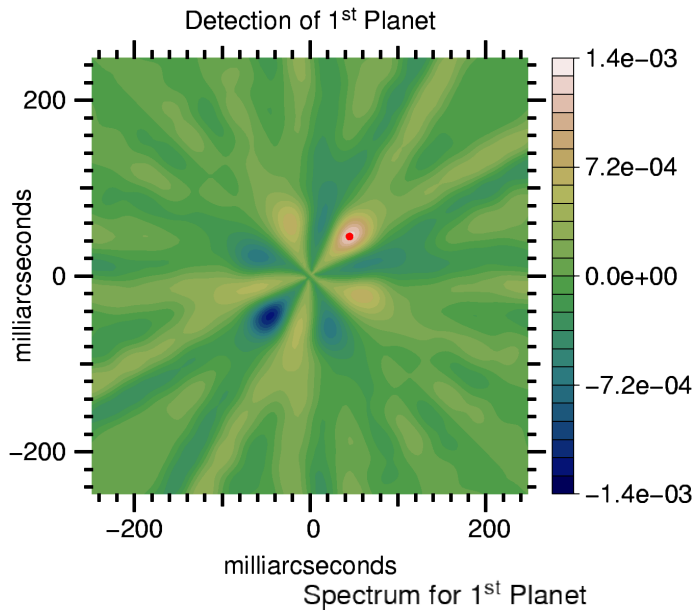
$F(\omega, \lambda, t)$



$R(\omega, \lambda, t)$



# Détection des planètes





# Problèmes de détection

- détection d'exoplanètes
  - interférométrie à annulation de phase
  - approche Bayésienne
  - problème 3-D  $(x, y, \lambda)$
  - détection et caractérisation des planètes
- holographie numérique
  - détection 4-D  $(x, y, z, r)$
  - extension du champ utile

# Déconvolution aveugle et myope



# Réponse instrumentale inconnue

- Que faire lorsque la réponse instrumentale est mal ou pas connue ?
  - déconvolution aveugle
  - déconvolution myope
- Est-ce que ça marche en pratique ?
  - applications en astronomie, en biologie et en médecine

# Connaître la réponse instrumentale (FEP) ou pas ?

- jusqu'à présent nous avons supposé la FEP ***parfaitement connue***
- en pratique c'est rarement le cas :
  - la FEP est ***mesurée*** (calibration) mais cet estimation est ***bruitée*** et peut être ***inappropriée*** (conditions variables d'observation)
  - la FEP ne peut pas être calibrée (elle varie trop vite ou on a pas de temps à perdre !)
- que faire...

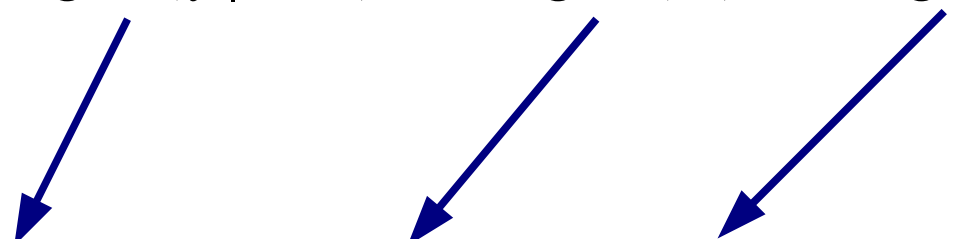
# MAP lorsque la FEP n'est pas parfaitement connue

on cherche l'image et la FEP en même temps !

l'approche MAP donne :

$$\begin{aligned}\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \Pr(\mathbf{x}, \mathbf{h} | \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \frac{\Pr(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{h}) \Pr(\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{h})}{\cancel{\Pr(\mathbf{y})}} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{ -\log \Pr(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{h}) - \log \Pr(\mathbf{x}) - \log \Pr(\mathbf{h}) \}\end{aligned}$$

soit :

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{ f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + f_{\text{img}}(\mathbf{x}) + f_{\text{PSF}}(\mathbf{h}) \}$$


# Déconvolution aveugle dans le cas Gaussien

solution MAP du problème de **déconvolution aveugle** :

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + f_{\text{img}}(\mathbf{x}) + f_{\text{PSF}}(\mathbf{h})\}$$

avec par exemple (cas gaussien) :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{obj}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})$$

$$f_{\text{img}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{img}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

$$f_{\text{PSF}}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{PSF}}^{-1} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})$$

$$\mathbf{C}_{\text{obj}} = \langle (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^{\text{T}} \rangle$$

convolution

image de l'objet

régularisations

# Déconvolution myope dans le cas Gaussien

solution MAP du problème de **déconvolution myope** :

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{h}\}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{h}} \{f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + f_{\text{img}}(\mathbf{x}) + f_{\text{PSF}}(\mathbf{h})\}$$

avec par exemple (cas Gaussien) :

$$f_{\text{ML}}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{obj}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{obj}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})$$

image de l'objet

$$+ (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{ref}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h})$$

$$f_{\text{img}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{img}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{prior}})$$

image de la référence

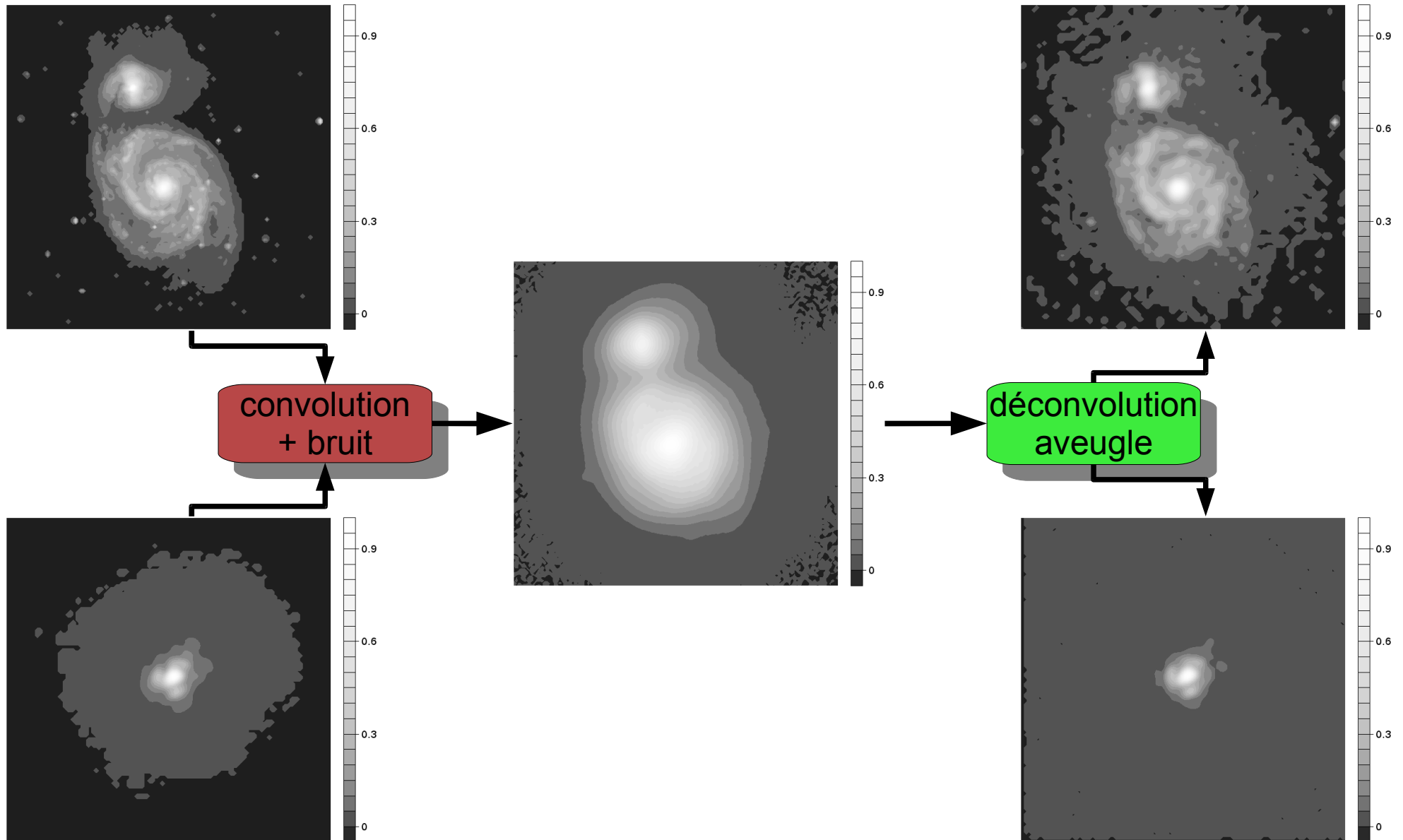
$$f_{\text{PSF}}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})^{\text{T}} \cdot \mathbf{C}_{\text{PSF}}^{-1} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\text{prior}})$$

$$\mathbf{C}_{\text{ref}} = \langle (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h} * \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}_{\text{ref}} - \mathbf{h} * \mathbf{x})^{\text{T}} \rangle$$

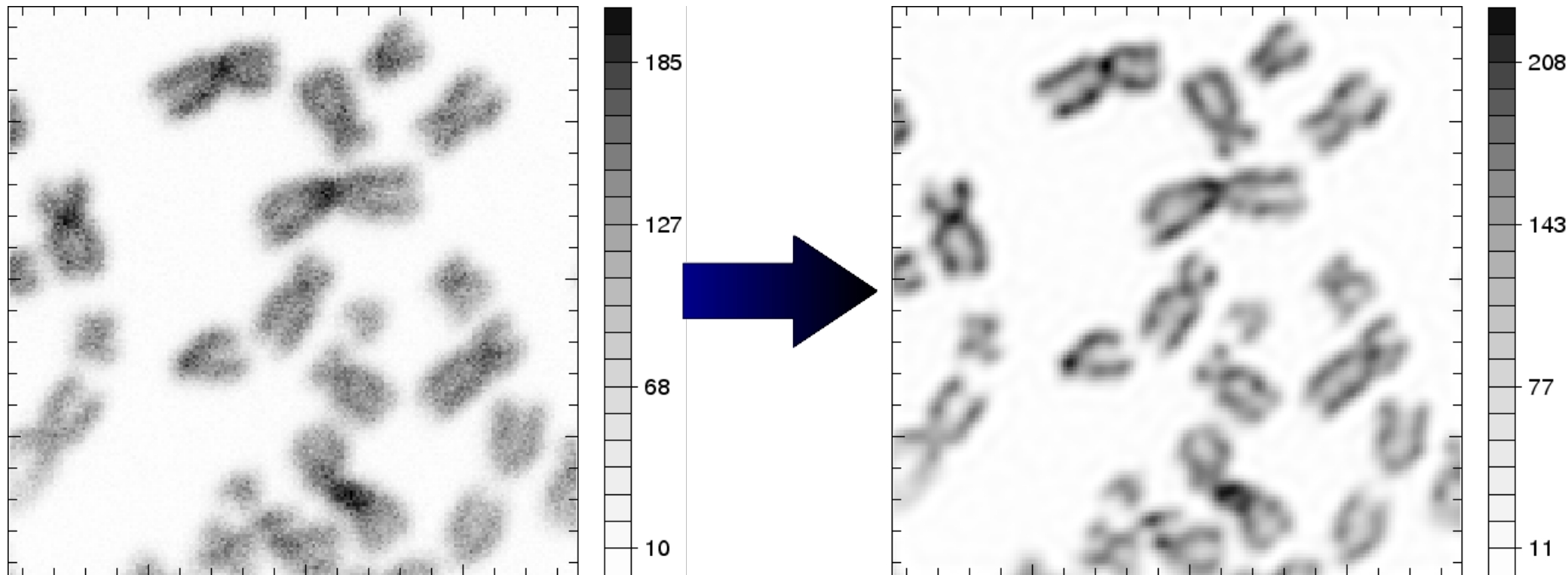
# Myope, aveugle ou ... ... parfaitement calibré

- dans le cas de la déconvolution myope/aveugle le problème n'est plus nécessairement convexe
  - optimisation globale (attention aux dégénérescences)
  - bien plus difficile
- le terme d'attache aux données sur la PSF permet de prendre en compte des mesures de calibration (résidus d'analyse de surface d'onde, *cf.* J.-P. Véran)
- dans la limite où la calibration est parfaite ( $\mathbf{C}_{\text{ref}} \approx \mathbf{0}$ ), on retrouve le cas de la déconvolution conventionnelle

# La déconvolution aveugle à l'oeuvre



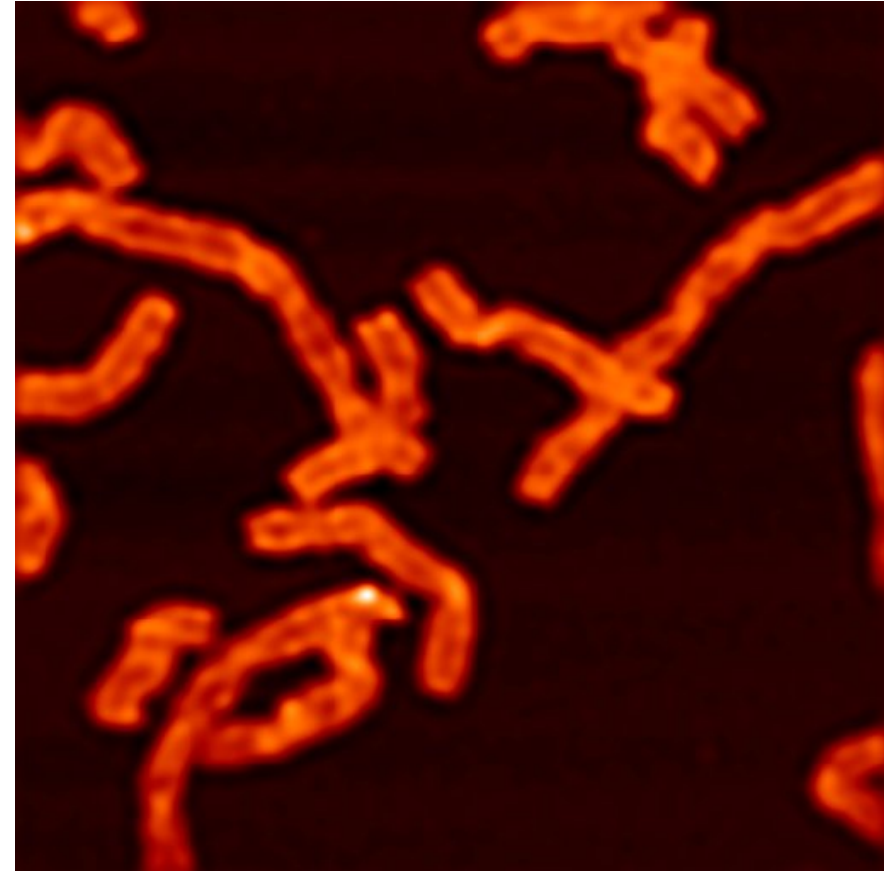
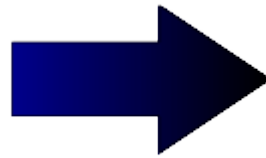
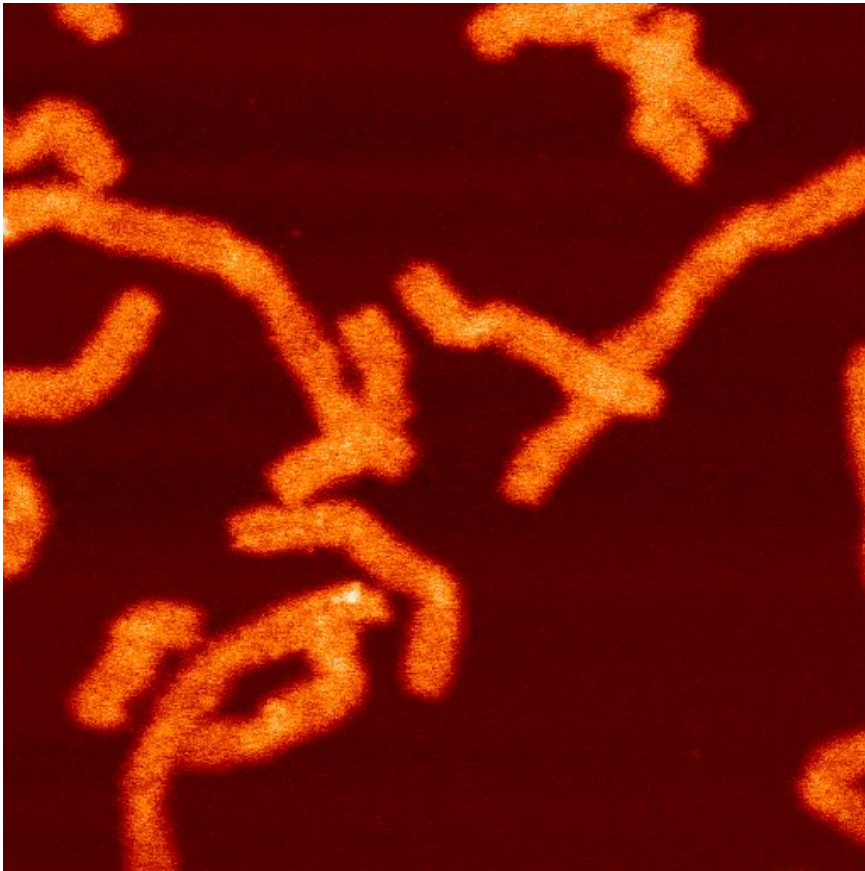
# Déconvolution aveugle appliquée en biologie



**Image de chromosomes par microscopie confocale.** Source : Jean-Claude Bernengo (Centre Commun de Quantimétrie, Université Claude Bernard, Lyon, France). Reconstruction par logiciel **MAAD**.

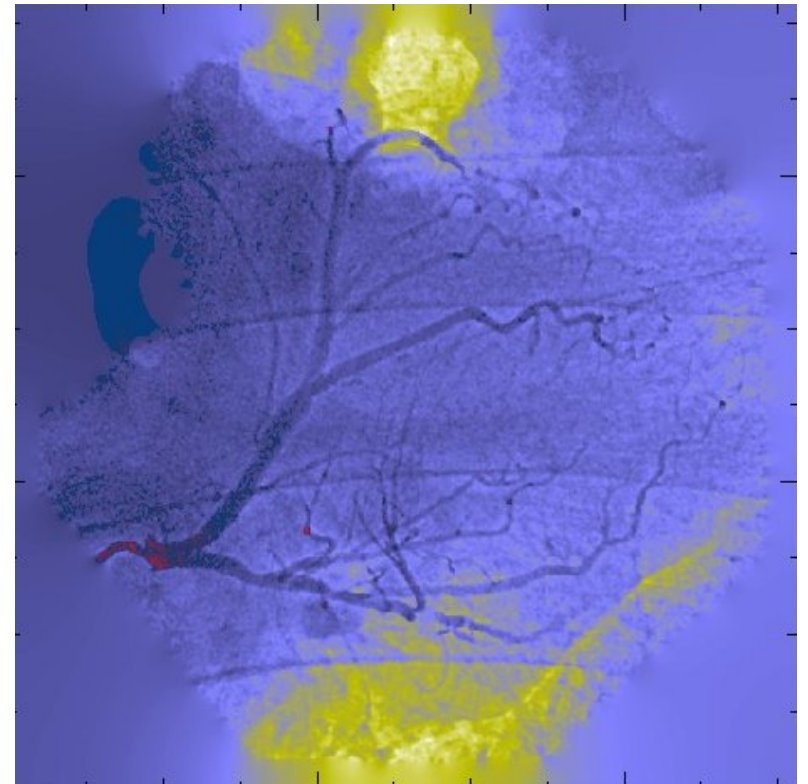
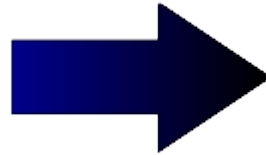
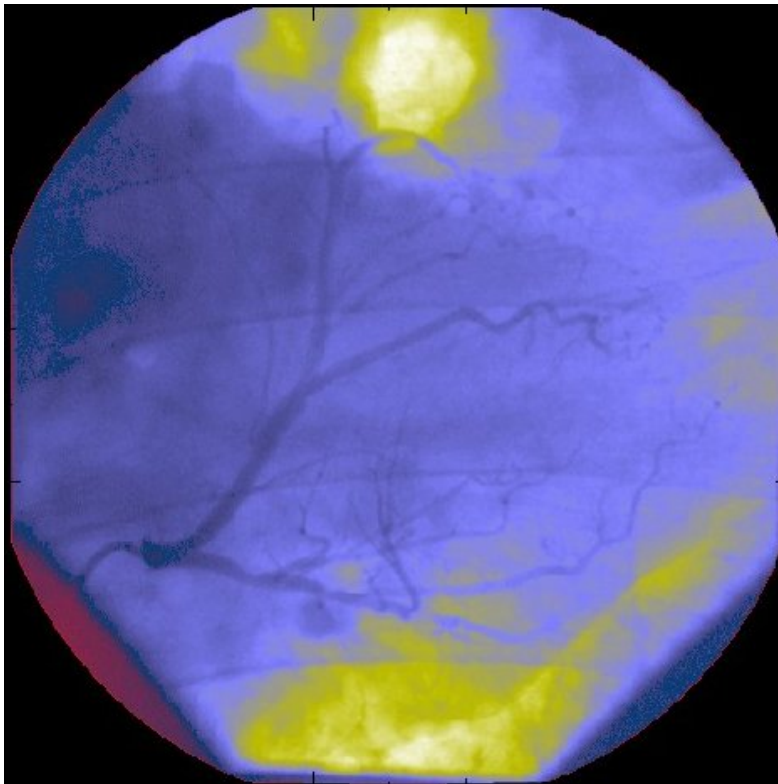


# Déconvolution aveugle appliquée en biologie



**Image de chromosomes par microscopie confocale.** Source : Jean-Claude Bernengo (Centre Commun de Quantimétrie, Université Claude Bernard, Lyon, France). Reconstruction par logiciel **MAAD**.

# Déconvolution aveugle appliquée en imagerie médicale



données/modèle 3-D (x,y,t)

**Vidéo coronarographique** obtenue à l'hôpital de la Croix-Rousse (Lyon). Traitement : Ferréol Soulez.

# Résumé/conclusions

- non-paramétrique (= modèle généraliste)
- *a priori* introduit pour éviter l'amplification du bruit (= régularisation)
  - meilleur compromis bias vs. erreurs d'estimation (réalise le minimum de variance)
- approche Bayésienne
- on se ramène à un problème d'optimisation
  - beaucoup ( $10^9$ ) de paramètres (diagonalisation ou méthodes d'optimisation itératives)
  - contraintes (positivité, normalisation)
  - dégénérescences (optimisation globale)

# Bibliographie

- A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, Pub. SIAM, ISBN 0-89871-572-5, 2005.
- E. Thiébaud, *Introduction to Image Reconstruction and Inverse Problems*, in *Optics in Astrophysics*, NATO ASI, Eds. R. Foy and F.-C. Foy, Pub. Kluwer Academic, 2005.