

## Approche inverse en traitement du signal

Éric Thiébaud

Centre de Recherche Astronomique de Lyon  
Université Claude Bernard Lyon I  
École Normale Supérieure de Lyon

2017

Éric Thiébaud

Problèmes inverses

Introduction  
Approches bayésiennes  
Régularisations  
Exemples  
Annexes

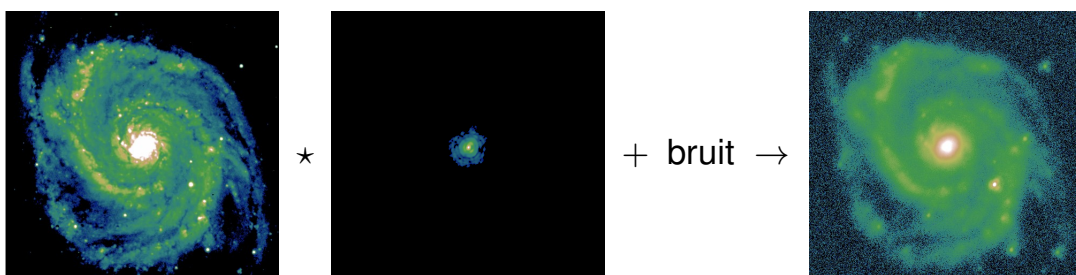
Exemples  
Problème direct  
Erreurs  
Solution

### Exemple 1 : Formation d'image

- formation d'image :

$$y_i = \underbrace{\int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s}}_{\text{produit de convolution}} + b_i$$

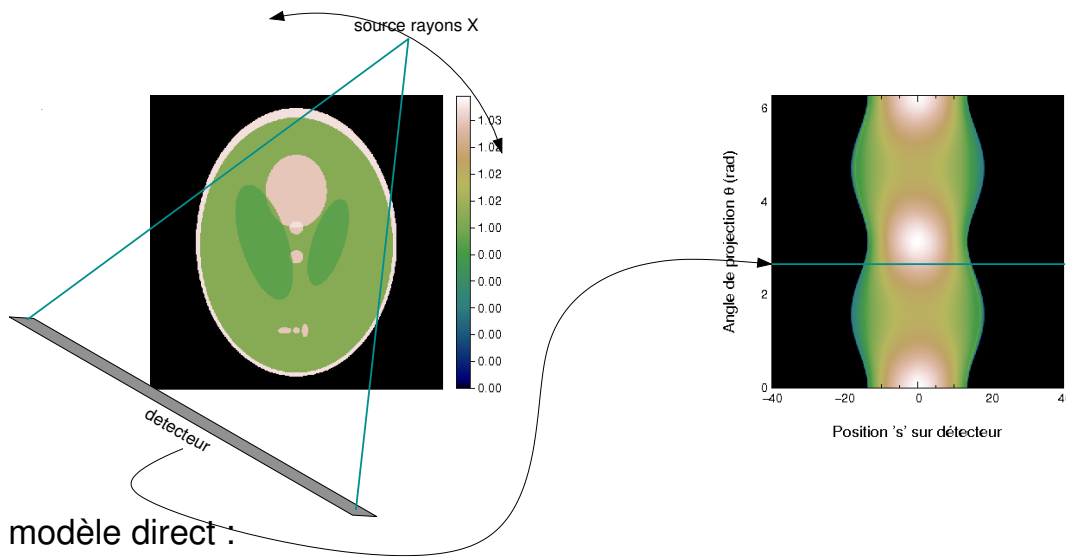
- objet :  $x(\mathbf{s})$
- réponse impulsionnelle (PSF) :  $h(\mathbf{r} - \mathbf{s})$
- bruit :  $b_i$  (au pixel n°  $i$  à la position  $\mathbf{r}_i$ )
- image observée :  $y_i$  (au pixel n°  $i$  à la position  $\mathbf{r}_i$ )



Éric Thiébaud

Problèmes inverses

## Exemple 2 : Tomographie



$$y_i = \int_0^{L_i} x(\mathbf{r}_* + l \mathbf{u}_i) dl \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_*}{L_i} \quad \text{et} \quad L_i = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_*\|$$

où  $\mathbf{r}_*$  et  $\mathbf{r}_i$  sont les position de la source et du  $i^{\text{ème}}$  pixel détecteur

## Exemple 3 : Dynamique galactique

- **observables** : distribution des vitesses  $F_\phi(R, v_\phi)$

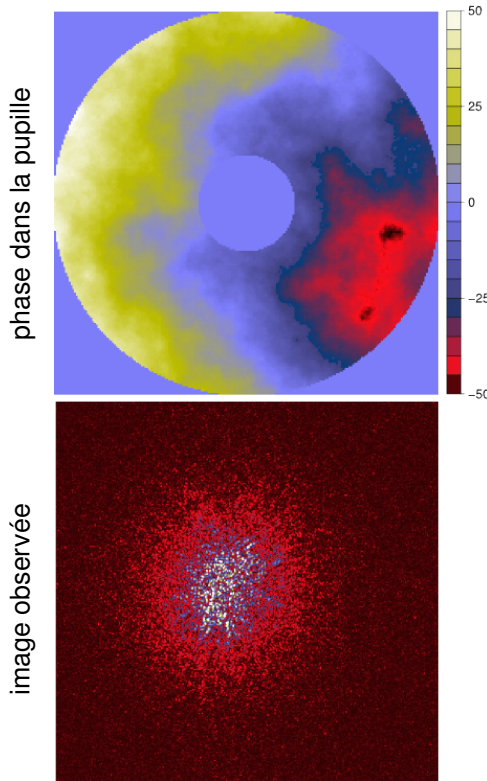


- **modèle physique** : dynamique disque galactique mince :

$$F_\phi(R, v_\phi) = \sqrt{2} \int_{\frac{1}{2} v_\phi^2 - \psi(R)}^0 \frac{f(\varepsilon, R v_\phi)}{\sqrt{\varepsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_\phi^2}} d\varepsilon \quad (\text{transformée d'Abel})$$

- **inconnues** : distribution des orbites  $f(\varepsilon, R v_\phi)$
- cinématique du gaz HI  $\Rightarrow$  potentiel  $\psi(R)$

## Exemple 4 : Reconstruction de phase



- **observables** : image dans le plan focal ;
- **variables d'intérêt** : phase dans le plan pupille

$$\varphi(\mathbf{s}) = \frac{2\pi}{\lambda} \ell(\mathbf{s})$$

avec  $\ell(\mathbf{s})$  et  $\mathbf{s}$  la différence de marche et la position dans la pupille ;

- **mesures** (approximation champ lointain) :

$$y_i = \alpha \left| \iint P(\mathbf{s}) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} [\ell(\mathbf{s}) + \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{s} \rangle / f]} d^2 \mathbf{s} \right|^2 + b_i$$

avec  $\alpha$  une constante de normalisation,  $P(\mathbf{s})$  la fonction pupille,  $\mathbf{r}$  la position dans le plan focal et  $f$  la distance focale.

*Remarques* :  $\mathbf{r}/f$  est la direction angulaire et  $\mathbf{s}/\lambda$  est la fréquence spatiale associée.

## Qu'est-ce qu'un problème inverse ?

- Des observables disponibles et modélisables :

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}} \iff \text{le } \mathbf{mod\grave{e}le\ direct}$$

- les données  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$  ;
  - le modèle  $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^M$  ;
  - les variables d'intérêt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  ;
  - les erreurs  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$ .
- **Objectif** : Retrouver les meilleurs paramètres  $\mathbf{x}$  compte tenu des données  $\mathbf{y}$  et du modèle  $\mathbf{m}$ .
  - **Étapes** :
    - Construire et analyser le modèle.
    - Établir un critère pour discriminer les meilleurs paramètres.
    - Élaborer une stratégie pour trouver la solution.

## Le problème direct

- Le **problème direct** consiste à construire le modèle des mesures connaissant l'objet d'intérêt, l'instrument et le détecteur :

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}} \quad \Leftarrow \quad \text{le } \mathbf{mod\grave{e}le\ direct}$$

- Remarques :
  - le nombre de mesures est fini :  $M < \infty$  mais le nombre de paramètres peut être arbitrairement grand :  $N \leq \infty$  pratique  $N$  est nécessairement fini ;
  - les mesures (et les paramètres) peuvent être hétérogènes ;
  - la partie déterministe du modèle,  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ , est connue mais peut être arbitrairement compliquée (e.g. non-linéaire) ;
  - le terme non déterministe  $\mathbf{b}$  prend en compte le bruit de mesure, les erreurs de modélisation, etc ;
  - pour simplifier, nous supposons que les variables aléatoires  $\mathbf{b}$  sont **centrées** au sens où :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0}} \quad \text{ou, au moins,} \quad \mathbb{E}(b_i | \mathbf{x}) \ll \sqrt{\text{Var}(b_i | \mathbf{x})};$$

- Exercice 1** : Montrer que

$$\mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Conséquences ?

## Deux exemples de modèles linéaires (1/2)

- Intégrale de Fredholm du 1<sup>er</sup> ordre (transformée d'Abel, réponse instrumentale linéaire, projection, ...) :

$$y_i = m(\mathbf{r}_i) + b_i = \int h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + b_i$$

Discrétisation :

$$y_i \approx \sum_j h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j) x(\mathbf{s}_j) \Delta s_j + b_i = \sum_j H_{i,j} x_j + b_i$$

avec  $x_j \equiv x(\mathbf{s}_j)$  et  $H_{i,j} \equiv h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}_j) \Delta s_j$ . En notation vectorielle :

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}}$$

## Deux exemples de modèles linéaires (2/2)

- Représentation de l'objet d'intérêt sur une **base de fonctions** :

$$x(\mathbf{s}) = \sum_j f_j(\mathbf{s}) x_j .$$

Modèle direct :

$$\begin{aligned} y_i &= \int h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + b_i \\ &= \int h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}) \left( \sum_j f_j(\mathbf{s}) x_j \right) d\mathbf{s} + b_i \\ &= \sum_j \underbrace{\left( \int h(\mathbf{r}_i, \mathbf{s}) f_j(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \right)}_{H_{i,j}} x_j + b_i \\ &= \sum_j H_{i,j} x_j + b_i \end{aligned}$$

On retrouve que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

## Modèle linéaire / non-linéaire

- 1 modèle linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- intégrale de Fredholm du 1<sup>er</sup> ordre (transformée d'Abel, convolution, ...);
- base de fonctions ;

- 2 modèle non-linéaire :

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

- tout ou partie du noyau  $h(\mathbf{r}, \mathbf{s})$  à retrouver : déconvolution aveugle, synthèse spectrale, ...
- mesures de corrélation (à 2 ou 3 points)
- restauration de phase : cristallographie, clôtures de phases (interférométrie),

...

⇒ unicité ?

## Bruit et erreurs de modélisation

- Le modèle direct s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b},$$

où Le terme  $\mathbf{b}$  incorpore les erreurs de modélisation et le bruit.

- Hypothèse : Les erreurs sont centrées** au sens où :

$$\mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Rappel :

$$\mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

- Exercice 2 :** Montrez que, l'hypothèse ci-dessus implique que :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{x}),$$

ce qui fournit une définition formelle du modèle  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ .

- Exercice 3 :** Montrer que la covariance des erreurs  $\mathbf{C}_{\mathbf{b}|\mathbf{x}}$  est la covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}$  des mesures étant donné les paramètres du modèle  $\mathbf{x}$ .

## Solution de l'exercice 1

Le développement de l'espérance de  $\mathbf{b}$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{b}) &= \int \Pr(\mathbf{b}) \mathbf{b} \, d\mathbf{b} && \text{par définition de l'espérance} \\ &= \int \left( \int \Pr(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right) \mathbf{b} \, d\mathbf{b} && \text{par la marginalisation de la probabilité jointe} \\ &= \int \int \Pr(\mathbf{b}|\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \mathbf{b} \, d\mathbf{b} && \text{par la règle de Bayes} \\ &= \int \left( \int \Pr(\mathbf{b}|\mathbf{x}) \mathbf{b} \, d\mathbf{b} \right) \Pr(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} && \text{par associativité et commutativité de la multiplication} \\ &= \int \mathbb{E}(\mathbf{b}|\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} && \text{par définition de l'espérance conditionnelle} \end{aligned}$$

Par conséquent si  $\mathbb{E}(\mathbf{b}|\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  alors  $\mathbb{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ . Ce qui prouve que :

$$\mathbb{E}(\mathbf{b}|\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \mathbb{E}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

## Solution de l'exercice 2

Calculons l'espérance des mesures sachant le modèle :

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{y} | \mathbf{x}) &= E(\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} | \mathbf{x}) && \text{car } \mathbf{y} = (\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}) \\
 &= E(\mathbf{m}(\mathbf{x}) | \mathbf{x}) + E(\mathbf{b} | \mathbf{x}) && \text{par distributivité de l'espérance sur l'addition} \\
 &= E(\mathbf{m}(\mathbf{x}) | \mathbf{x}) && \text{par hypothèse (erreurs centrées)} \\
 &= \mathbf{m}(\mathbf{x}) && \text{par conséquence de l'espérance conditionnelle}
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{y} | \mathbf{x})$$

est une définition formelle possible du modèle.

Réciproquement, partant de cette définition, la variable aléatoire définie par :

$$\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}),$$

est centrée au sens où :

$$E(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

et le modèle direct des données s'écrit toujours  $\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ .

## Équivalence d'hypothèses

Les deux formulations suivantes sont équivalentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \\ \mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \\ E(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

## Solution de l'exercice 3

Calculons la covariance des erreurs sachant le modèle :

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) &= \mathbb{E}\left((\mathbf{b} - \mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}))^\top | \mathbf{x}\right) && \text{par définition de la covariance} \\
 &= \mathbb{E}\left(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top | \mathbf{x}\right) && \text{car } \mathbb{E}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \mathbf{0} \\
 &= \mathbb{E}\left((\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}))^\top | \mathbf{x}\right) && \text{car } \mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x}) \\
 &= \mathbb{E}\left((\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{x})) \cdot (\mathbf{y} - \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{x}))^\top | \mathbf{x}\right) && \text{car } \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) \\
 &= \text{Cov}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) && \text{par définition de la covariance}
 \end{aligned}$$

Ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{Cov}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \text{Cov}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) .}$$

## Approximation gaussienne pour les erreurs

- modèle direct :

$$\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

où  $\mathbf{b}$  incorpore les erreurs de modélisation et le bruit ;

- la statistique des erreurs est **normale centrée** :

$$\boxed{\mathbf{b} | \mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\mathbf{b}|\mathbf{x}})}$$

c'est-à-dire que la fonction de distribution des erreurs sachant  $\mathbf{x}$  est :

$$\text{PDF}(\mathbf{b} | \mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{b}\right\}}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{b}|\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}}$$

où  $M$  est le nombre de mesures.

- **Exercice 4** : Montrer que la fonction de distribution des données  $\mathbf{y}$  sachant  $\mathbf{x}$  est :

$$\text{PDF}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]\right\}}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}}$$



## Qu'est-ce que l'on cherche ?

- modèle direct :

$$y = m(x) + b$$

- on veut les **meilleurs** paramètres  $\tilde{x} \approx x$  compte tenu des données, du modèle et de la statistique (supposée) des erreurs ;
- ⇒ il faut un **critère** pour déterminer cette solution ;
- plus ambitieux, on veut la statistique des paramètres :
  - fonction de distribution des paramètres ;
  - moyenne et variance des paramètres ;
- ⇒ **approche bayésienne**.

## Maximum de vraisemblance : Objectif

- Quel est le meilleur modèle ?
- ⇒ **réponse** : c'est celui qui maximise la probabilité d'avoir observé les données :

$$x_{\text{ML}} = \arg \max_x \Pr(y|x)$$

où **ML = Maximum Likelihood**

- ▲ C'est la meilleure solution au sens de la statistiques des erreurs...

## Maximum de vraisemblance : Fonction de pénalisation

- solution au sens du maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- fonction de pénalisation :

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -k \log \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \text{const}$$

avec  $k > 0$  ;

- condition d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\left. \frac{\partial f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ML}}} = \mathbf{0}$$

si  $f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  est convexe cette condition est suffisante.

## Maximum de vraisemblance : Approximation gaussienne

- fonction de distribution des erreurs :

$$\text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]\right\}}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}}$$

- solution pour un modèle non-linéaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ML}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}} \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) && \text{(espace vectoriel)} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- fonction de pénalisation :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= -2 \log \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) + \text{const} \\ &= [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})] \end{aligned}$$

- résolution par algorithme de moindres carrés non-linéaires (e.g. Levenberg-Marquardt si pas trop de paramètres) ;

## Maximum de vraisemblance : Approximation gaussienne, modèle linéaire

- modèle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

- fonction de pénalisation :

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})$$

- condition d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre (**équations normales**) :

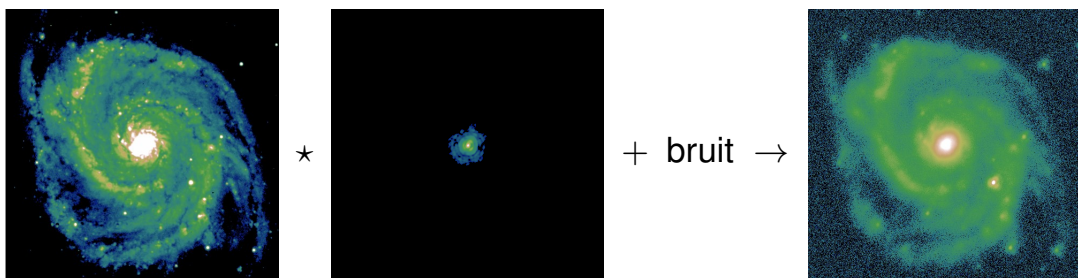
$$\frac{\partial f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{ML}}} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_{\text{ML}} = \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{x}_{\text{ML}} = \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

## Maximum de vraisemblance : Application à la déconvolution

- formation d'image (convolution) :



$$y_i = \int h(\mathbf{r}_i - \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + b_i$$

- diagonalisation du modèle direct par transformation de Fourier :

$$m(\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r} - \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \xrightarrow{\text{T.F.}} \tilde{m}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{h}(\boldsymbol{\nu}) \tilde{x}(\boldsymbol{\nu})$$

- en discret :

$$\tilde{y}_k = \tilde{h}_k \tilde{x}_k + \tilde{b}_k.$$

## Maximum de vraisemblance : Application à la déconvolution

- bruit gaussien blanc :

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (y_i - m(\mathbf{x})_i)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})\|^2$$

$$\propto \sum_k \left| \tilde{y}_k - \tilde{h}_k \tilde{x}_k \right|^2$$

avec  $\sigma^2 = \text{Var}(\mathbf{b}|\mathbf{x})$  ;

- solution (au sens du maximum de vraisemblance) :

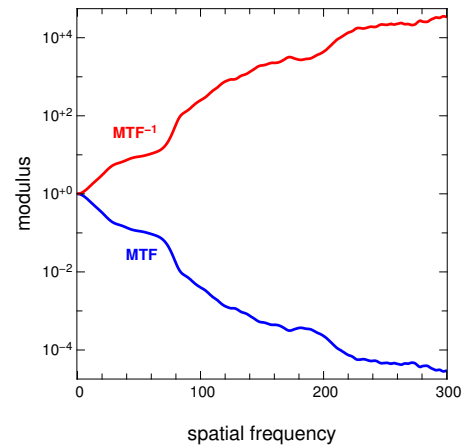
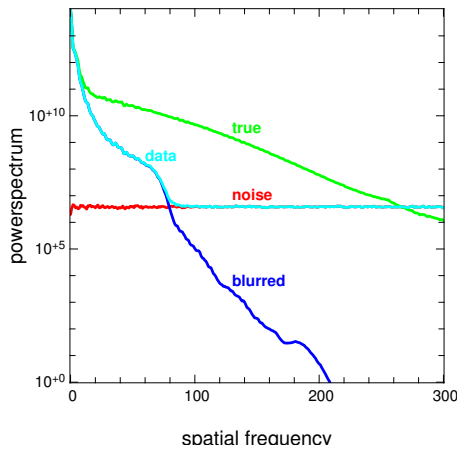
$$\left. \frac{\partial f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}}{\partial \tilde{x}_k} \right|_{\tilde{x}_k = \tilde{x}_k^{(\text{ML})}} = 0$$

$$\iff \boxed{\tilde{x}_k^{(\text{ML})} = \frac{\tilde{y}_k}{\tilde{h}_k}}$$

## Maximum de vraisemblance : Application à la déconvolution

$$\mathbf{x}^{(\text{ML})} = \text{FFT}^{-1} \left( \begin{array}{c} \text{FFT} \left( \begin{array}{c} \text{Image convoluee} \end{array} \right) \\ \text{FFT} \left( \begin{array}{c} \text{Point Spread Function} \end{array} \right) \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{unconstrained maximum likelihood} \\ \text{Image bruitée} \end{array}$$

## Qu'est-ce qui cloche ?



- inversion directe (*i.e.* maximum de vraisemblance) :

$$\tilde{x}_k^{(ML)} = \frac{\tilde{y}_k}{\tilde{h}_k} = \tilde{x}_k + \frac{\tilde{b}_k}{\tilde{h}_k}$$

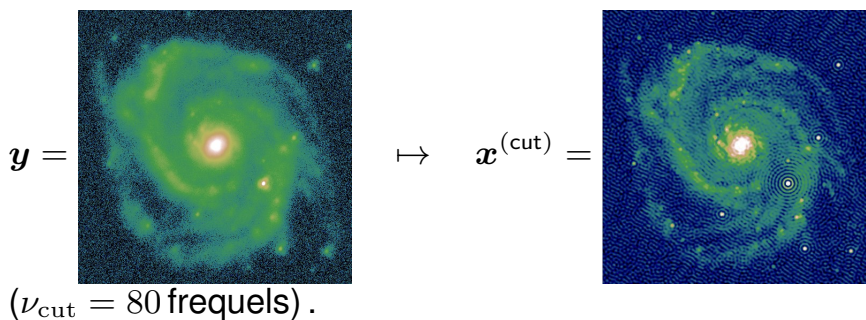
- ▶ amplification du bruit

## Troncature fréquentielle

Il est possible d'éviter l'amplification du bruit en imposant une fréquence de coupure :

$$\tilde{x}_k^{(cut)} = \begin{cases} \frac{\tilde{y}_k}{\tilde{h}_k} & \text{for } |\nu_k| < \nu_{cut} \\ 0 & \text{for } |\nu_k| \geq \nu_{cut} \end{cases}$$

qui donne :



## Maximum de vraisemblance

### Propriétés

- solution (maximum de vraisemblance) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ML}} &= \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{y} \\ &= \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{x} + \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

- **non-biaisé** au sens où :

$$\langle \mathbf{x}_{\text{ML}} \rangle_{\mathbf{b}} = \mathbf{x}$$

- “*covariance*” par rapport aux vrais paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{ML}} &= \langle (\mathbf{x}_{\text{ML}} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_{\text{ML}} - \mathbf{x})^\top \rangle_{\mathbf{b}} \\ &= \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ amplification du bruit

## Approche bayésienne : Maximum a posteriori

- on maximise la probabilité du modèle étant donné les mesures (MAP = *maximum a posteriori*) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}} \frac{\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \Pr(\mathbf{x})}{\Pr(\mathbf{y})} && \text{(théorème de Bayes)} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \underbrace{-\log \Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x})}_{f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x})} - \underbrace{\log \Pr(\mathbf{x})}_{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} \right\} \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\text{post}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

- $f_{\text{post}}(\mathbf{x})$  = fonction pénalisante **a posteriori** :

$$f_{\text{post}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$$

- $f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  = terme de **vraisemblance** (attache aux données)
- $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  = terme de **régularisation** (a priori)

## Approximation gaussienne

- PDF des mesures :

$$\text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]\right\}}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}}$$

- ▶ terme de vraisemblance :

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]$$

- PDF a priori :

$$\text{PDF}(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}}$$

- ▶ terme de régularisation :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

## Approximation gaussienne, modèle linéaire

- terme de vraisemblance (modèle linéaire) :

$$f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})$$

- fonction de pénalisation :

$$\begin{aligned} f_{\text{post}}(\mathbf{x}) &= f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

- ▶ gradient :

$$\frac{\partial f_{\text{post}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2 \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2 \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

- ▶ solution MAP :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \arg \min_{\mathbf{x}} f_{\text{post}}(\mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

## Approximation gaussienne, modèle linéaire

### Solution MAP

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(\mathbf{x} | \mathbf{y}) \\
 &= (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{y|x}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{y|x}^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{C}_x^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\
 &= \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{y|x}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{y|x}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\
 &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_{y|x})^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\
 &= \mathbf{x}_{\text{MV}} \qquad \qquad \qquad (\text{rappel : } \mathbf{C}_b = \mathbf{C}_{y|x}) \\
 &= \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \langle \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 \rangle
 \end{aligned}$$

- ▶ les propriétés de MV s'appliquent à MAP
- mais aussi : probabilités, espérances de  $\neq$  quantités, ...

## Marginalisation

### Probabilité des observables

$$\begin{aligned}
 \text{PDF}(\mathbf{y}) &= \int \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \text{PDF}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{C}_y^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\right\}}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_y|^{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{y}} &= \langle \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{x},b} = \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}} \\
 \mathbf{C}_y &= \mathbf{C}_{y|x} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top
 \end{aligned}$$



## Probabilités

### Probabilité *a posteriori* des paramètres

$$\begin{aligned} \text{PDF}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \frac{\text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \text{PDF}(\mathbf{x})}{\int \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}') \text{PDF}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}))^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}))\right\}}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}|^{1/2}} \end{aligned}$$

avec covariance *a posteriori* :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} &= (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \\ &\leq \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

## Contrôle par la régularisation du nombre de paramètres indépendants

### Nombre de paramètres résolus par les données

- espérance des termes de log-probabilité :

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle &= \text{tr}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_{\text{MAP}}) = \text{tr}(\mathbf{S}_{\text{MAP}} \cdot \mathbf{H}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{MAP}}) \\ \langle f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle &= \text{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}}^{-1}) \\ &= M - \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{MAP}}) \\ \langle f_{\text{post}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle &= \langle f_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle + \langle f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle \\ &= M \end{aligned}$$

- le nombre de paramètres **résolus** par les données est la trace de l'opérateur de résolution :

$$N_{\text{EDF}} = \langle f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_{\text{MAP}}) \rangle = \text{tr}(\mathbf{R}_{\text{MAP}})$$

## Critère du minimum de variance

- critère de sélection :

$$\mathbf{x}_{\text{MMSE}} = \mathbf{x}_{\text{MV}} = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}}} \langle \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 \rangle$$

(MMSE = *minimum mean squared error*, MV = *minimum variance*) ;

- hypothèses :
  - $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux processus aléatoires indépendants de moyennes et covariances connues :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} \rangle &= \bar{\mathbf{x}} & \text{et} & & \mathbf{C}_x &= \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle \\ \langle \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{0} & \text{et} & & \mathbf{C}_b &= \mathbf{C}_{y|\mathbf{x}} = \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top \rangle \end{aligned}$$

- modèle linéaire :  $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}$  ;
- on cherche la solution sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \langle \mathbf{x} \rangle + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}] \end{aligned}$$

où  $\mathbf{S}$  est l'**opérateur d'estimation** linéaire.

## Dérivation du minimum de variance

- pénalisation (MSE = *mean square error*) :

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \langle \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 \rangle \\ &= \langle \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{S} \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}]\|^2 \rangle \end{aligned}$$

- MSE est quadratique et convexe en  $S_{i,j}$  donc le minimum est atteint en annulant les dérivées partielles de MSE par rapport à  $\mathbf{S}$  :

$$\left. \frac{\partial \text{MSE}}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\mathbf{S}=\tilde{\mathbf{S}}} = \mathbf{0} ;$$

en développant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{MSE}}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_b = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b) = \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \\ &\Leftrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \text{MSE}}{\partial \mathbf{S}} &= \langle \{ \mathbf{S} \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}] - (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \} \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}]^\top \rangle \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{I}) \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top \rangle \\ &\quad + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{I}) \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{b}^\top \rangle + \mathbf{S} \cdot \langle \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle \cdot \mathbf{H}^\top \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_b \end{aligned}$$

en effet

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{b}^\top \rangle &= \langle \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \rangle \cdot \langle \mathbf{b} \rangle^\top = \mathbf{0} \cdot \mathbf{0}^\top = \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{b} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle &= \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{b}^\top \rangle^\top = \mathbf{0} \\ \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle &= \mathbf{C}_x \\ \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top \rangle &= \mathbf{C}_b \end{aligned}$$

## Opérateur d'estimation du minimum de variance

On cherche la solution sous la forme :

$$\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}),$$

où  $\mathbf{S}$  est l'**opérateur d'estimation**. Sous le critère de moindre variance :

$$\mathbf{S}_{\text{MV}} = \arg \min_{\mathbf{S}} \langle \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 \rangle$$

on trouve en utilisant les identités matricielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{MV}} &= \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b)^{-1} \\ &= (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \end{aligned}$$

- 1 pas d'autres hypothèses que : (i) modèle linéaire, (ii) moyenne et covariances connues, et (iii) erreurs centrées  
 ► *i.e.* pas forcément gaussien ;
- 2 dimensions du système d'équations à inverser : soit  $N \times N$ , soit  $M \times M$  ;
- 3  $\mathbf{S}_{\text{MV}}$  généralise le **filtre de Wiener** ;

## Expressions du minimum de variance

solution au sens du minimum de variance :

$$\mathbf{x}_{MV} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{MV} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}})$$

en utilisant l'expression de  $\mathbf{S}_{MV}$  et les identités matricielles :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{MV} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b)^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{C}_x^{-1} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

les espérances de cet estimateur sont :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_b &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ \langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_x &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{b} \\ \langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_{x,b} &= \bar{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

## Espérance de l'estimateur

Pour simplifier la notation, on note  $\mathbf{W} = \mathbf{C}^{-1}$  la *matrice de poids* qui est l'inverse de la covariance  $\mathbf{C}$ . Ce qui donne :

$$\mathbf{S}_{MV} = \left( \mathbf{W}_x + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e$$

L'espérance de l'estimateur MV pour un objet  $\mathbf{x}$  donné est :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_b &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{W}_x + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \left( \mathbf{W}_x + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W}_x \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \left( \mathbf{W}_{\text{prior}} + \mathbf{W}_{\text{data}} \right)^{-1} \cdot (\mathbf{W}_{\text{data}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{W}_{\text{prior}} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{W}_{\text{prior}} = \mathbf{W}_e$  est la matrice de poids associée aux a priori sur les paramètres et  $\mathbf{W}_{\text{data}} = \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{W}_e \cdot \mathbf{H}$  est la matrice de poids associée aux informations sur les paramètres apportées par les données  $\mathbf{y}$ . On peut même en déduire que la matrice de poids associée aux paramètres estimés  $\mathbf{x}_{MV}$  est  $\mathbf{W}_{\text{post}} = \mathbf{W}_{\text{prior}} + \mathbf{W}_{\text{data}}$ .

## Opérateur de résolution

- Ce qui nous intéresse c'est de trouver les paramètres  $\mathbf{x}$  correspondant aux mesures donc il faut comparer  $\mathbf{x}_{MV}$  et  $\mathbf{x}$ , en moyennant au sens des erreurs  $\mathbf{b}$  seulement :

$$\langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

soit

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{x}} &= \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \mathbf{R}_{MV} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{R}_{MV} \equiv \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H}$$

est l'**opérateur de résolution** (Backus & Gilbert, 1968) ;

## Opérateur de résolution

nous avons vu que :

$$\langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{R}_{MV} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{MV} &= \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{H} \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^T + \mathbf{C}_{\mathbf{b}})^{-1} \cdot \mathbf{H} \\ &= (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \\ &= \mathbf{I} - (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \\ &= \text{Cov}(\mathbf{x}_{MV}) \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \\ &= \langle (\mathbf{x}_{MV} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}_{MV} - \bar{\mathbf{x}})^T \rangle \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \end{aligned}$$

on remarque que :

- 1  $\mathbf{R}_{MV} \neq \mathbf{I}$  donc  $\mathbf{x}_{MV}$  est **biaisé** au sens où  $\langle \mathbf{x}_{MV} \rangle_{\mathbf{b}} \neq \mathbf{x}$
- 2 le filtrage par  $\mathbf{R}_{MV}$  est responsable d'une **atténuation** (i.e.  $\mathbf{R}_{MV} \leq \mathbf{I}$ ) ;

## Covariance totale

$$\langle \mathbf{x}_{MV} \rangle = \bar{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x} \rangle$$

donc la covariance totale de  $\mathbf{x}_{MV}$  est :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{x}_{MV}) &= \langle (\mathbf{x}_{MV} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x}_{MV} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle \\ &= \langle \mathbf{S}_{MV} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{S}_{MV}^\top \rangle \\ &= \mathbf{S}_{MV} \cdot \langle [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{H} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}]^\top \rangle \cdot \mathbf{S}_{MV}^\top \\ &= \mathbf{S}_{MV} \cdot [\mathbf{H} \cdot \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle \cdot \mathbf{H}^\top + \langle \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^\top \rangle] \cdot \mathbf{S}_{MV}^\top \\ &= \mathbf{S}_{MV} \cdot [\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b] \cdot \mathbf{S}_{MV}^\top \\ &= \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b)^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \\ &= \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \\ &= \left[ \mathbf{I} - \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{C}_x^{-1} \right] \cdot \mathbf{C}_x \\ &= \mathbf{C}_x - \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \end{aligned}$$

## Covariance

- erreur par rapport aux vrais paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV} &= \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{S}_{MV} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{MV}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

- “covariance” par rapport aux vrais paramètres :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{MV} &= \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV})^\top \rangle \\ &= \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{MV}) \cdot \mathbf{C}_x \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{MV})^\top}_{\text{bias}} + \underbrace{\mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{C}_b \cdot \mathbf{S}_{MV}^\top}_{\text{variance}} \\ &= \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{C}_x - \underbrace{\mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top \left( \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_b \right)^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_x}_{\text{Cov}(\mathbf{x}_{MV}) = \mathbf{R}_{MV} \cdot \mathbf{C}_x} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{MV}) \cdot \mathbf{C}_x \end{aligned}$$

## Variance

- erreur par rapport aux vrais paramètres :

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV} = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{MV}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{S}_{MV} \cdot \mathbf{b}$$

- espérance de la MSE pour la solution  $\mathbf{x}_{MV}$  :

$$\begin{aligned} \langle \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV}\|^2 \rangle &= \text{tr} \left( \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{MV})^\top \rangle \right) \\ &= \text{tr}(\mathbf{C}_{MV}) \end{aligned}$$

## Application à la déconvolution

- formation d'image :
  - réponse linéaire et invariante par translation (isoplanétisme) ;
  - diagonalisation par transformée de Fourier :

$$y(\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r} - \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + b(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{F.T.}} \tilde{y}(\boldsymbol{\nu}) = \underbrace{\tilde{h}(\boldsymbol{\nu}) \tilde{x}(\boldsymbol{\nu})}_{\tilde{m}(\boldsymbol{\nu})} + \tilde{b}(\boldsymbol{\nu})$$

- $\langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{0}$  ;
- covariances  $\mathbf{C}_b$  et  $\mathbf{C}_x$  stationnaires
  - ▶ diagonalisation par T.F.
- solution (au sens du minimum de variance) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{MV} &= \bar{\mathbf{x}} + \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \left( \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{y} \quad (\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}) \\ &= \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}_b \cdot \mathbf{C}_x^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{y} \quad (\text{invariance par translation}) \end{aligned}$$

## Application à la déconvolution : filtre de Wiener

- formation d'image :

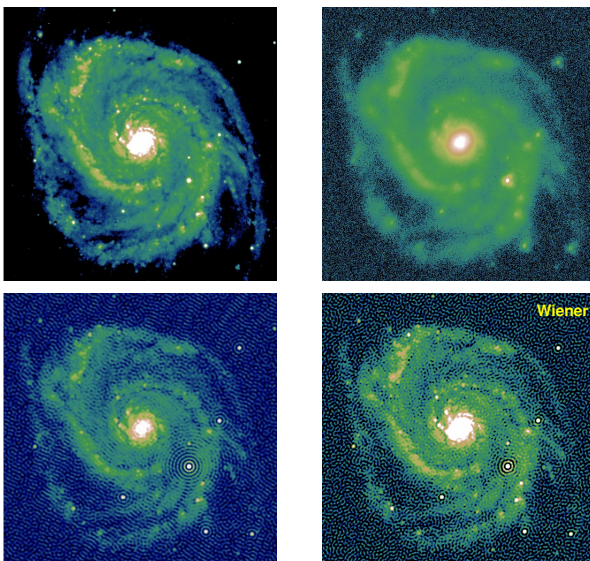
$$y(\mathbf{r}) = \int h(\mathbf{r} - \mathbf{s}) x(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + b(\mathbf{r}) \xrightarrow{\text{F.T.}} \tilde{y}(\boldsymbol{\nu}) = \tilde{h}(\boldsymbol{\nu}) \tilde{x}(\boldsymbol{\nu}) + \tilde{b}(\boldsymbol{\nu})$$

- $\langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  et  $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{0}$  ;
- covariances  $\mathbf{C}_b$  et  $\mathbf{C}_x$  stationnaires ;
- solution (au sens du minimum de variance) = **filtre de Wiener** :

$$\mathbf{x}_{\text{MV}} = \left( \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{H} + \mathbf{C}_b \cdot \mathbf{C}_x^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{y}$$

$$\xrightarrow{\text{F.T.}} \tilde{x}_{\text{MV}}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{\tilde{h}(\boldsymbol{\nu})^* \tilde{y}(\boldsymbol{\nu})}{|\tilde{h}(\boldsymbol{\nu})|^2 + \frac{\langle |\tilde{b}(\boldsymbol{\nu})|^2 \rangle}{\langle |\tilde{x}(\boldsymbol{\nu})|^2 \rangle}}$$

## Filtre de Wiener : Résultats





## Minimum de Variance : Résumé

- erreurs (bruit) et signal indépendants ;
- moyenne et covariance de  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{x}$  connues ;
- $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{0}$  ;
- modèle linéaire ;
- estimation linéaire (en fait affine), non-biaisée (au sens où  $\langle \mathbf{x}_{\text{ML}} \rangle = \bar{\mathbf{x}}$ ) ;
- généralise le filtre de Wiener ;
- meilleur compromis entre “**biais**” et “**variance**” ;

## Résolution et propagation des erreurs

- solution *linéaire* :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\ &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{b}\end{aligned}$$

- ▶ résolution :  $\mathbf{R} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}$  ;
- ▶ filtrage des erreurs (bruit) par  $\mathbf{S}$  ;
- ▶ propagation des erreurs dans la solution :

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\mathbf{x}} \rangle_{\mathbf{b}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{E} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathbf{S} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{b})^{\top} \rangle_{\mathbf{b}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{S}^{\top}\end{aligned}$$

## Comparaison ML et MAP (ou MV)

### Observables

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

### Solution

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ML}} &= \mathbf{S}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{y} \\ \mathbf{x}_{\text{MAP}} &= \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{S}_{\text{MAP}} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

### Opérateur d'estimation

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{ML}} &= (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \\ &= \mathbf{H}^{-1} \quad (\text{si } \mathbf{H} \text{ inversible}) \\ \mathbf{S}_{\text{MAP}} &= \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{H}^\top + \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}})^{-1} \\ &= (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \end{aligned}$$

## Comparaison ML et MAP (ou MV)

### Résolution

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{ML}} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{R}_{\text{MAP}} &= \mathbf{I} - \mathbf{C}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} &= (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \end{aligned}$$

### Propagation des erreurs

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ML}} &= (\mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{H})^{-1} \\ \mathbf{E}_{\text{MAP}} &= \mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot (\mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} + \mathbf{I})^{-2} \\ &= (\mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{I})^{-2} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} \\ &\leq \mathbf{E}_{\text{ML}} \end{aligned}$$

## Régularisations quadratiques

- régularisation de Tikhonov ( $\mu > 0$ ) :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mu \|\mathbf{x}\|^2 = \mu \mathbf{x}^{\top} \cdot \mathbf{x}$$

- contrainte de lissage :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_{i,j} [x(i+1, j) - x(i, j)]^2 + \mu \sum_{i,j} [x(i, j+1) - x(i, j)]^2$$

- corrélation  $\sim$  a priori Gaussien (Tarantola-Valette) :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{p})^{\top} \cdot \text{Cov}(\mathbf{x})^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

- régularisation de Tikhonov généralisée :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p}\|_{\mathbf{Q}}^2 = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p})^{\top} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{p})$$

$\Rightarrow$  solution analytique si linéaire ;

## Régularisations non-quadratiques

- maximum d'entropie (avec a priori  $\mathbf{p}$ ) :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\mathbf{p}) = \mu \sum_i [p_i - x_i + x_i \log(x_i/p_i)]$$

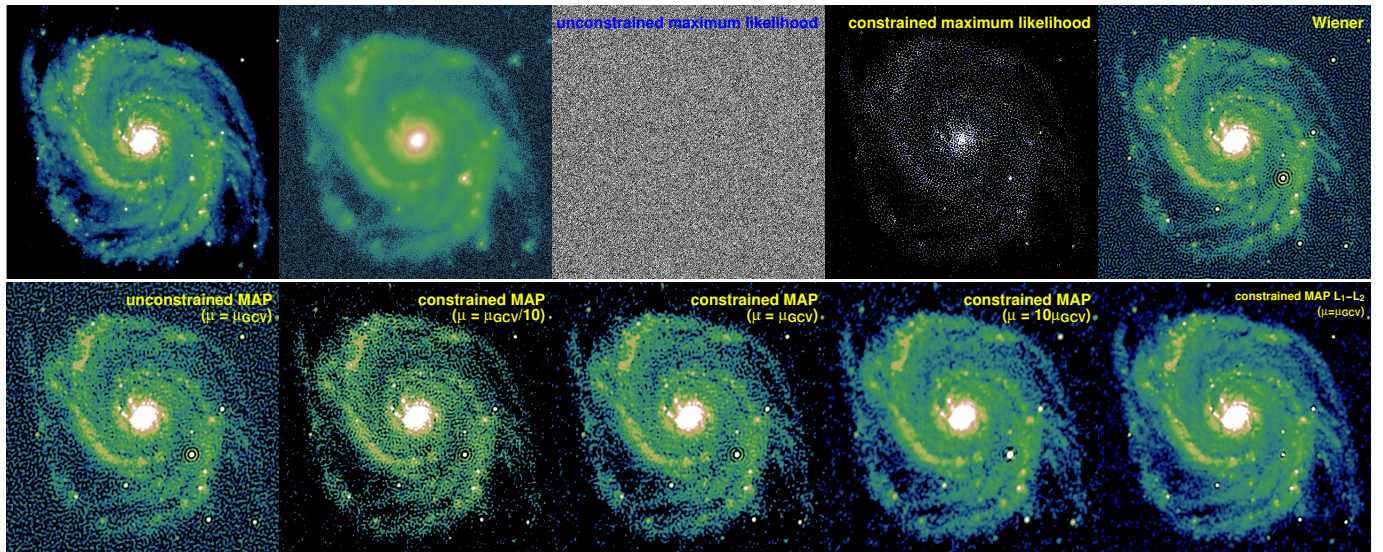
- lissage avec norme  $\ell_1 - \ell_2$  :

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \mu \sum_i \mathcal{N}_{1-2}(x_{i+1} - x_i)$$

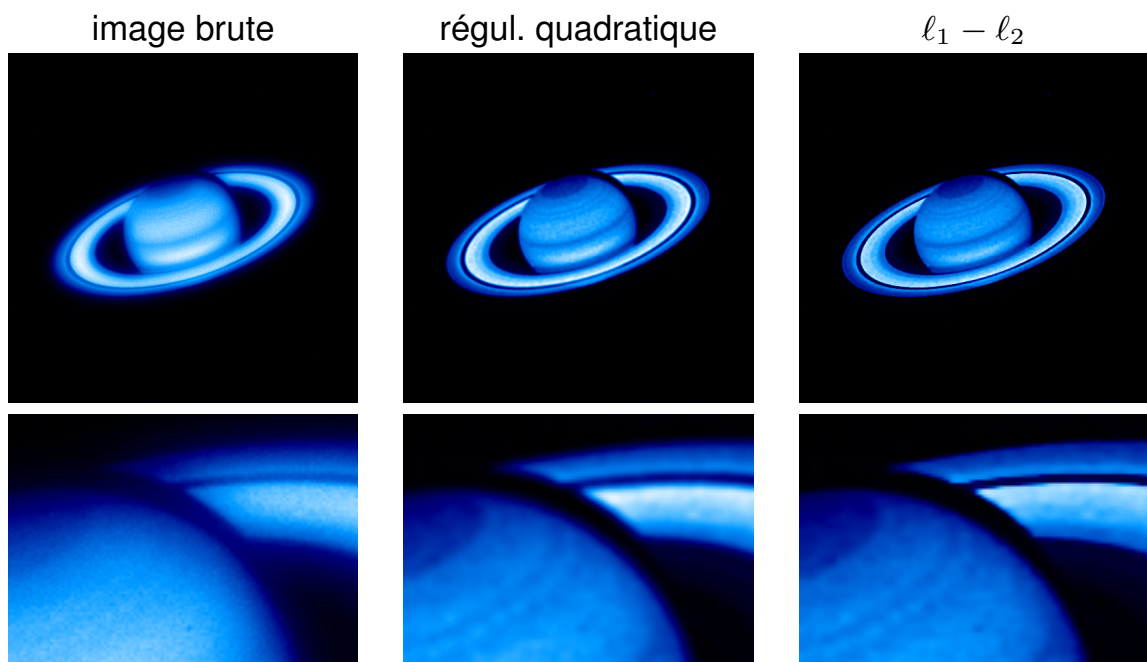
$$\mathcal{N}_{1-2}(\Delta x) = 2 \varepsilon^2 \left[ |\Delta x/\varepsilon| - \log(1 + |\Delta x/\varepsilon|) \right] \begin{matrix} \underset{|\Delta x| \ll \varepsilon}{\simeq} & \Delta x^2 \\ \underset{|\Delta x| \gg \varepsilon}{\simeq} & 2 \varepsilon |\Delta x| \end{matrix}$$

$\Rightarrow$  pas de solution analytique (en général)

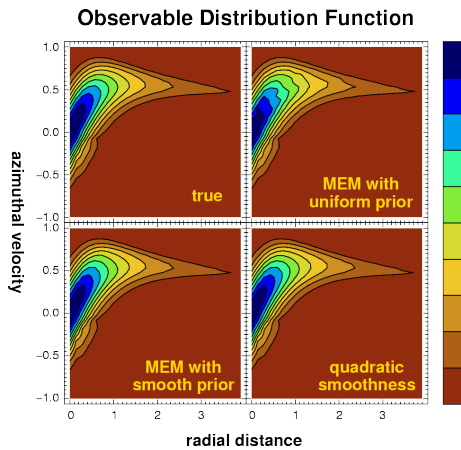
## Résultats en déconvolution : simulations



## Image HST de Saturne

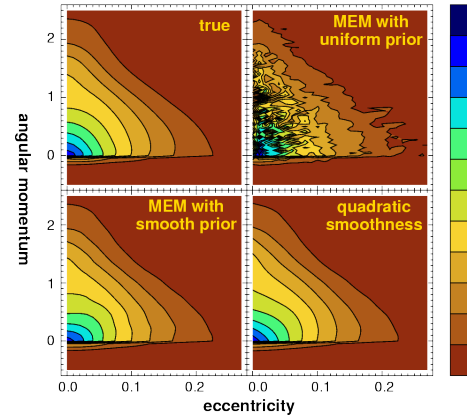


## Fonction de distribution, disque minces



données :  $F_\phi(R, v_\phi)$

Orbit Distributions

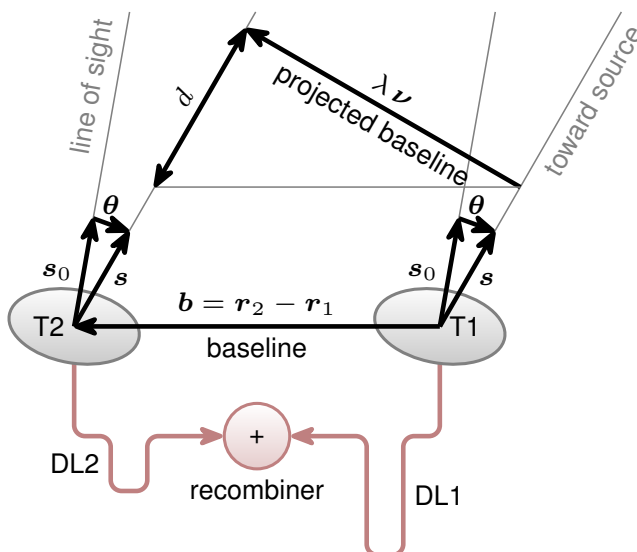


paramètres :  $f(\varepsilon, R v_\phi)$

$$\text{modèle : } F_\phi(R, v_\phi) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2} v_\phi^2 - \psi(R)} \frac{f(\varepsilon, R v_\phi)}{\sqrt{\varepsilon + \psi(R) - \frac{1}{2} v_\phi^2}} d\varepsilon$$

(Pichon & Thiébaud, 1998)

## Interférométrie optique



Retard de chemin optique :

$$d = \langle \mathbf{b}, \mathbf{s} \rangle .$$

Les lignes à retard sont telles que la différence de phase vaut  $-\varphi$  pour une source au centre du champ (dans la direction  $s_0$ ), alors la différence de phase pour une source dans la direction  $s$  vaut :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (d - d_0) - \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \langle \mathbf{b}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi ,$$

On introduit  $\nu$  égal à la base  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  projetée sur le ciel divisée par la longueur d'onde  $\lambda$  et donc tel que :

$$\langle \mathbf{b}/\lambda, \boldsymbol{\theta} \rangle = \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle ,$$

alors :

$$\Delta\varphi = 2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi .$$

## Interférométrie optique

Amplitude complexe de la lumière recombiniée :

$$A(\varphi) = \iint \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) \left(1 + e^{i(2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi)}\right) d^2\boldsymbol{\theta},$$

avec  $A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta})$  l'amplitude complexe de la source dans la direction  $\boldsymbol{\theta}$ .

Intensité :

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \langle |A(\varphi)|^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \iiint \langle A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) A_{\text{obj}}^*(\boldsymbol{\theta}') \rangle \left(1 + e^{i(2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi)}\right) \\ &\quad \left(1 + e^{-i(2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta}' \rangle - \varphi)}\right) d^2\boldsymbol{\theta} d^2\boldsymbol{\theta}'. \end{aligned}$$

Pour un objet incohérent :

$$\begin{aligned} \langle A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) A_{\text{obj}}^*(\boldsymbol{\theta}') \rangle &= \begin{cases} \langle A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) \rangle \langle A_{\text{obj}}^*(\boldsymbol{\theta}') \rangle = 0 & \text{if } \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}' \\ \langle |A_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta})|^2 \rangle = I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) & \text{if } \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}' \end{cases} \\ &= I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) \delta(\boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

où  $I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta})$  est la distribution d'intensité de l'objet.

## Interférométrie optique

Pour un objet incohérent :

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \iint I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) (1 + \cos(2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi)) d^2\boldsymbol{\theta} \\ &= \iint I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) d^2\boldsymbol{\theta} + \iint I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) \cos(2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle - \varphi) d^2\boldsymbol{\theta} \\ &= \tilde{I}_{\text{obj}}(\mathbf{0}) + \Re(\tilde{I}_{\text{obj}}(\boldsymbol{\nu}) e^{i\varphi}), \end{aligned}$$

où  $\tilde{I}_{\text{obj}}(\boldsymbol{\nu})$  est la transformée the Fourier de  $I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta})$  :

$$\tilde{I}_{\text{obj}}(\boldsymbol{\nu}) = \iint I_{\text{obj}}(\boldsymbol{\theta}) e^{-i2\pi \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\theta} \rangle} d^2\boldsymbol{\theta}.$$

En variant  $\varphi$ , l'intensité  $I(\varphi)$  forme des franges d'interférence (comme l'expérience des trous d'Young). Le contraste des frange :

$$\frac{\max_{\varphi} I(\varphi) - \min_{\varphi} I(\varphi)}{\max_{\varphi} I(\varphi) + \min_{\varphi} I(\varphi)} = \frac{|\tilde{I}(\boldsymbol{\nu})|}{\tilde{I}(\mathbf{0})},$$

et la phase de ces franges sont l'amplitude et la phase de  $\tilde{I}_{\text{obj}}(\boldsymbol{\nu})$  à la fréquence spatiale  $\boldsymbol{\nu}$  égale à la base projetée sur la longueur d'onde.

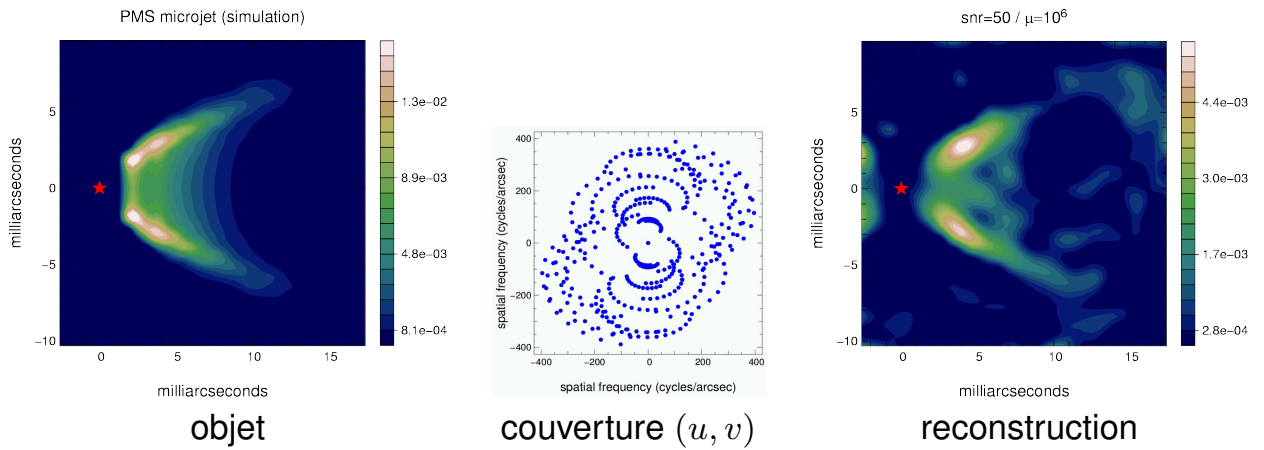


## Interférométrie optique

- mesures = spectre de puissance et clôtures de phases (modèle non linéaire)
- peu de mesures et couverture du plan  $(u, v)$  inhomogène
- déficit de mesures de phase de Fourier

**JMMC**

**Multi-aperture Image Reconstruction Algorithm**



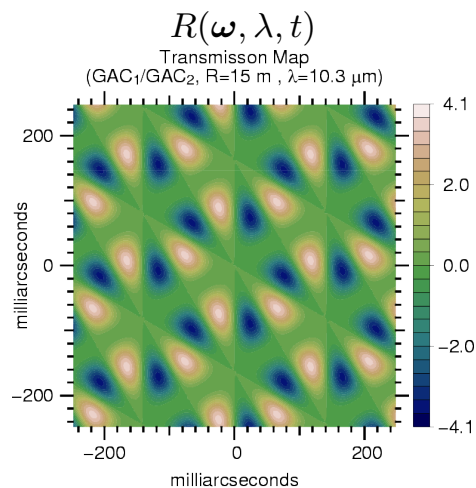
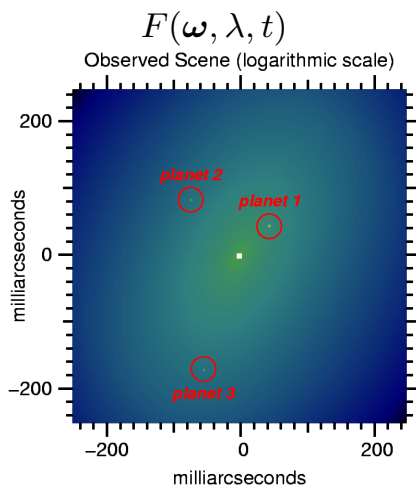
Éric Thiébaud

Problèmes inverses

## Darwin : interférométrie à frange noire



$$A(\lambda, t) = \int R(\omega, \lambda, t) F(\omega, \lambda, t) d\omega$$

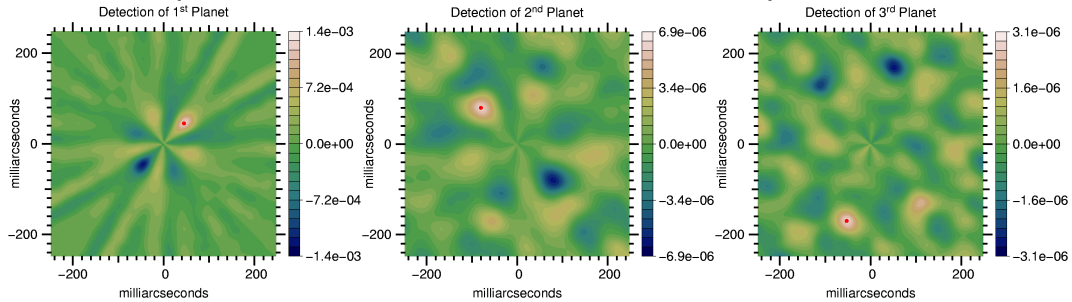


Éric Thiébaud

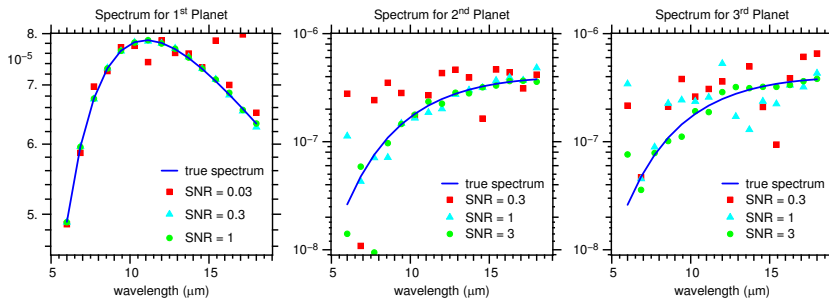
Problèmes inverses

## Darwin : détection et caractérisation des planètes

- détection à partir des "cartes" de vraisemblance a posteriori :



- distribution spectrale d'énergie estimée :

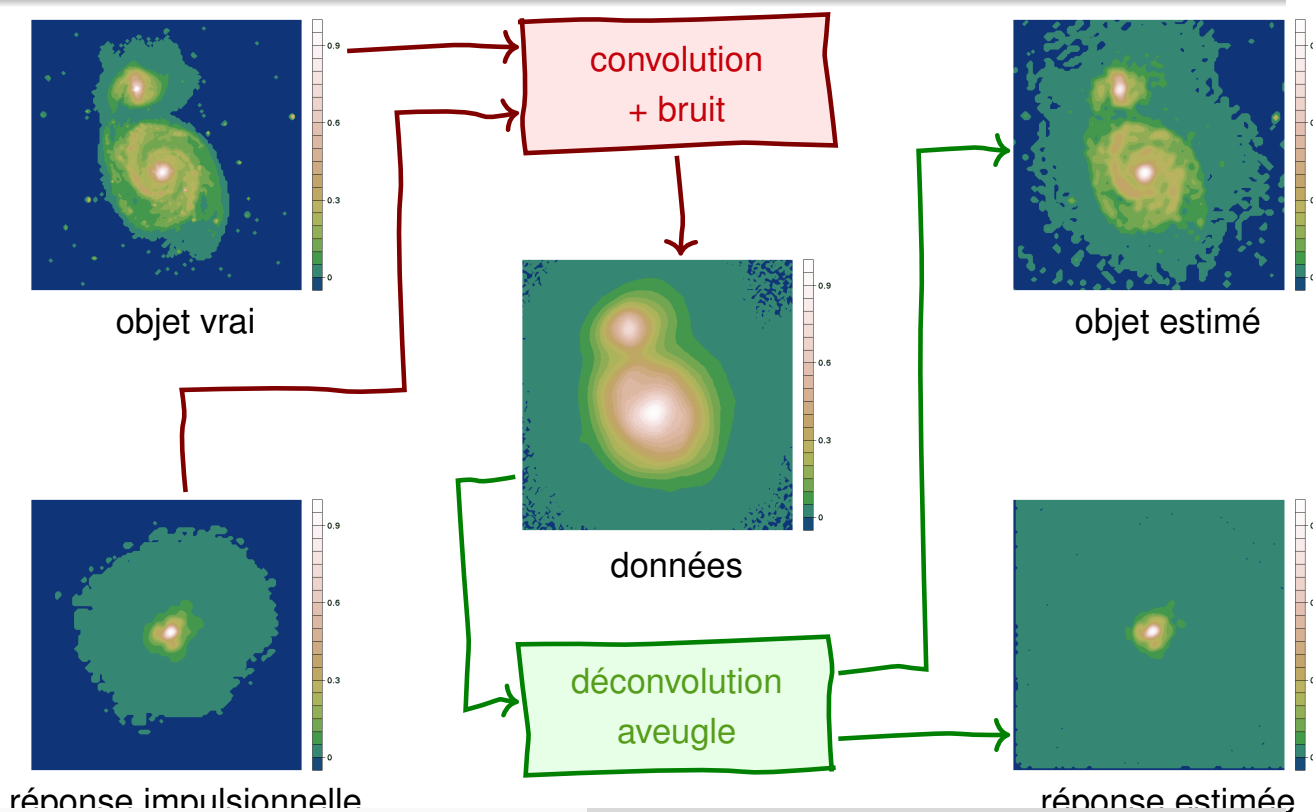


- collaboration avec Laurent Mugnier (ONERA)

Éric Thiébaud

Problèmes inverses

## Principe de la déconvolution aveugle



Éric Thiébaud

Problèmes inverses



## Déconvolution aveugle appliquée en biologie

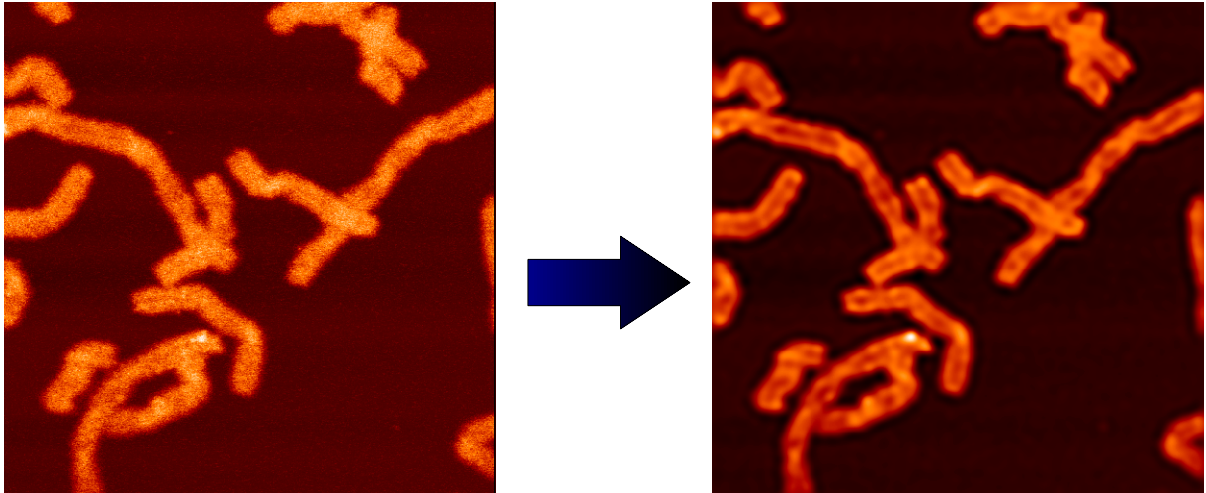
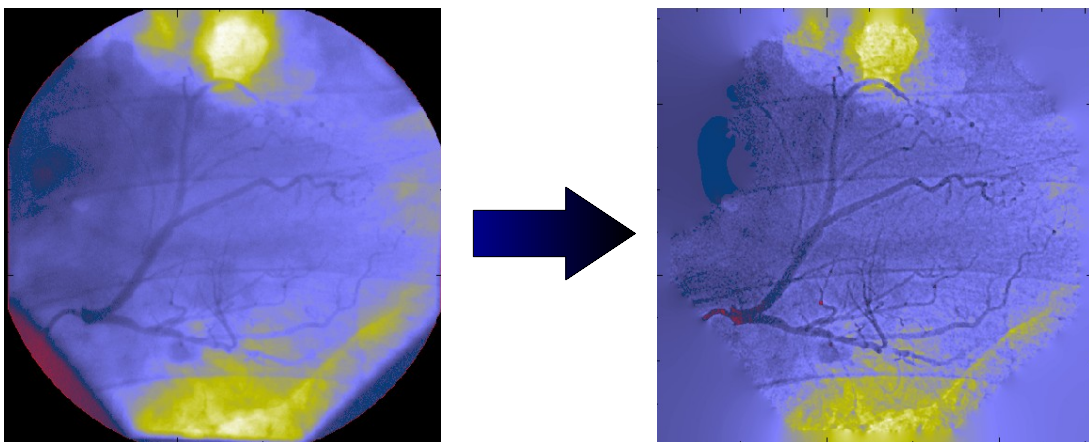


Image de chromosomes par microscopie confocale. Source : Jean-Claude Bernengo (Centre Commun de Quantimétrie, Université Claude Bernard, Lyon, France). Reconstruction par logiciel **MAAD**.

## Déconvolution aveugle appliquée en médecine



Vidéo coronarographique obtenue à l'hôpital de la Croix-Rousse (Lyon).  
Traitement : **Ferréol Soulez**.

## Annexe : Dérivées par rapport à une matrice

définition :

$$\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{A}} \right)_{i,j} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial A_{i,j}} \quad \text{avec } \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{et } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

par exemple :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2}{\partial \mathbf{A}} \right)_{i,j} &= \frac{\partial \sum_k (\sum_\ell A_{k,\ell} x_\ell - b_k)^2}{\partial A_{i,j}} \\ &= 2 \left( \sum_\ell A_{i,\ell} x_\ell - b_i \right) x_j \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2}{\partial \mathbf{A}} = 2 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}^\top$$

## Annexe : Dérivées par rapport à une matrice

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})^\top \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})}{\partial A_{i,j}} \\ &= \frac{\partial \sum_{k,\ell} (\sum_m A_{k,m} x_m - b_k) W_{k,\ell} (\sum_n A_{\ell,n} x_n - b_\ell)}{\partial A_{i,j}} \\ &= \sum_\ell x_j W_{i,\ell} \left( \sum_n A_{\ell,n} x_n - b_\ell \right) + \sum_k \left( \sum_m A_{k,m} x_m - b_k \right) W_{k,i} x_j \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})^\top \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b})}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{W} + \mathbf{W}^\top) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}^\top$$

## Annexe : Formules de Sherman-Morrison-Woodbury

- pour des matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **inversibles** :

$$\left( \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^\top \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \left( \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B}^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

où  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ;

- si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont **positives définies**, alors :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^\top \cdot \left( \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^\top \right)^{-1} = \left( \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B}^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{C}^\top \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

## Annexe : Espérance de la log-vraisemblance

facile à démontrer :

$$\text{tr}(\mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^\top) = \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}$$

d'où il vient :

$$\langle [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \cdot \mathbf{W} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})] \rangle = \text{tr}(\mathbf{W} \cdot \langle [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})] \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{m}(\mathbf{x})]^\top \rangle)$$

## Annexe : Propagation des erreurs

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{ML}} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathbf{S}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{S}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{b})^\top \rangle_{\mathbf{b}} = \mathbf{S}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{S}_{\text{ML}}^\top \\ &= \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{H}^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot \mathbf{H} \right)^{-1} \\ \mathbf{E}_{\text{MAP}} &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathbf{S}_{\text{MAP}} \cdot \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{S}_{\text{MAP}} \cdot \mathbf{b})^\top \rangle_{\mathbf{b}} = \mathbf{S}_{\text{MAP}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{S}_{\text{MAP}}^\top \\ &= \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{E}_{\text{ML}}^{-1} \right)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}}^{-1} \cdot \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{E}_{\text{ML}}^{-1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{E}_{\text{ML}}^{-1} \right)^{-1} &= \mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} + \mathbf{I} \right)^{-1} \\ &= \left( \mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{I} \right)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{MAP}} &= \mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot \left( \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} + \mathbf{I} \right)^{-2} \\ &= \left( \mathbf{E}_{\text{ML}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} + \mathbf{I} \right)^{-2} \cdot \mathbf{E}_{\text{ML}} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{MAP}} \leq \mathbf{E}_{\text{ML}}}$$

## Annexe : Distribution de probabilité jointe

**hypothèses :**

- modèle linéaire :  $\mathbf{y} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$  ;
- distributions gaussiennes ;
- $\langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{x}}$ ,  $\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{0} \implies \langle \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{x}}$  ;

**loi jointe** pour les paramètres  $\mathbf{x}$  et les mesures  $\mathbf{y}$  :

$$\begin{aligned} \text{PDF}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \text{PDF}(\mathbf{x}) \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right)}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{x}}|^{1/2}} \\ &\quad \times \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})\right)}{(2\pi)^{M/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{b}}|^{1/2}} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)}{(2\pi)^{(N+M)/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{x}}|^{1/2} |\mathbf{C}_{\mathbf{b}}|^{1/2}} \end{aligned}$$

avec :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{x}}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{b}}^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})$$

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (suite)

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_x^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}) \\
 &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot (\mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \\
 &\quad - 2(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \quad (\text{en utilisant } \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & -\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \\ -\mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{C}_b^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \\
 &= (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})^\top \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & -\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \\ -\mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{C}_b^{-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous allons montrer que  $\mathbf{W} = \mathbf{C}_z^{-1}$ , l'inverse de la de covariance de  $\mathbf{z}$ .

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (suite)

Notons que :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$$

avec :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{I}_M \end{pmatrix}$$

et où  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité sur  $\mathbb{R}^{N \times N}$ .

Comme les variables aléatoires  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  sont indépendantes, la matrice de covariance de  $\mathbf{u}$  est diagonale par blocs :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_u &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^\top \rangle = \begin{pmatrix} \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle & \langle (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})^\top \rangle \\ \langle (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \rangle & \langle (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}) \cdot (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})^\top \rangle \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (suite)

Matrice de covariance de  $z$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_z &\stackrel{\text{def}}{=} \langle (z - \bar{z}) \cdot (z - \bar{z})^\top \rangle = \mathbf{A} \cdot \langle (u - \bar{u}) \cdot (u - \bar{u})^\top \rangle \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{A}^\top \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{I}_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_b + \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérifions que  $\mathbf{W} = \mathbf{C}_z^{-1}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \cdot \mathbf{C}_z &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & -\mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \\ -\mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{C}_b^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_b + \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_M \end{pmatrix} = \mathbf{I}_{N_z} \end{aligned}$$

CQFD.

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (suite)

Calcul du déterminant de  $\mathbf{C}_z$  :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}_z) &= \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_u \cdot \mathbf{A}^\top) \\ &= \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{C}_u) \det(\mathbf{A}^\top) && \text{(cf. rappel 1)} \\ &= \underbrace{\det(\mathbf{I}_N) \det(\mathbf{I}_N)}_{\det(\mathbf{A})} \underbrace{\det(\mathbf{C}_x) \det(\mathbf{C}_b)}_{\det(\mathbf{C}_u)} \underbrace{\det(\mathbf{I}_N^\top) \det(\mathbf{I}_N^\top)}_{\det(\mathbf{A}^\top)} && \text{(cf. rappel 2)} \\ &= \det(\mathbf{C}_x) \det(\mathbf{C}_b) \end{aligned}$$

Rappels :

- 1 Le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des dét triangulaire est égal au produit des déterminants :  $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$ .
- 2 Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (suite)

Finalement, la **loi jointe** pour les paramètres  $\mathbf{x}$  et les mesures  $\mathbf{y}$ , peut se mettre sous la forme d'une distribution **gaussienne** pour  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$  :

$$\begin{aligned} \text{PDF}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \text{PDF}(\mathbf{x}) \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)}{(2\pi)^{(N+M)/2} |\mathbf{C}_x|^{1/2} |\mathbf{C}_b|^{1/2}} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})^\top \cdot \mathbf{C}_z^{-1} \cdot (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})\right)}{(2\pi)^{N_z/2} |\mathbf{C}_z|^{1/2}} = \text{PDF}(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^\top \cdot \mathbf{C}_x^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x})^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}})^\top \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \\ \mathbf{C}_z &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x & \mathbf{C}_b + \mathbf{M} \cdot \mathbf{C}_x \cdot \mathbf{M}^\top \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}_z^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_x^{-1} + \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{M}^\top \cdot \mathbf{C}_b^{-1} \\ \mathbf{C}_b^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{C}_b^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Annexe : Distribution de probabilité jointe (exercices)

Dans le cas gaussien avec modèle linéaire :

- 1 Montrer que la distribution de probabilité jointe peut se mettre sous la forme :

$$\text{PDF}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{PDF}(\mathbf{x}) \text{PDF}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \text{PDF}(\mathbf{y}) \text{PDF}(\mathbf{x}|\mathbf{y}).$$

- 2 Trouver les expressions de  $\text{PDF}(\mathbf{y})$  et de  $\text{PDF}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ .
- 3 De quel types sont ces lois ? Donner les modes et les covariances de ces lois.