

## Prérequis : les lois de Kepler.

### Les documents

Nous vous proposons d'étudier à l'aide de Geogebra des graphiques provenant d'un article publié dans Astronomy and Astrophysics.

L'article original paru dans Astronomy and Astrophysics volume 520 est consultable à l'adresse :

<http://www.aanda.org/articles/aa/pdf/2010/12/aa14943-10.pdf>

ou [http://www.aanda.org/articles/aa/full\\_html/2010/12/aa14943-10/aa14943-10.html](http://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2010/12/aa14943-10/aa14943-10.html)

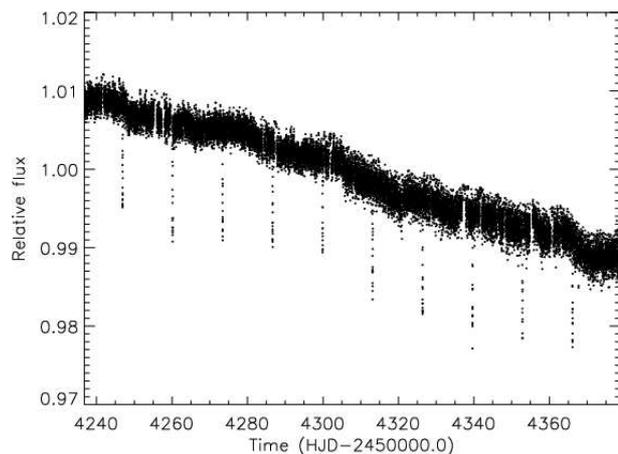
Cette activité est très largement inspirée d'un atelier proposé par Cécile Ferrari lors de l'école d'été 2015 du CLEA.

### L'étoile CoRoT-10b

Il s'agit d'une étoile de 0,89 masse solaire et 0,79 rayon solaire.

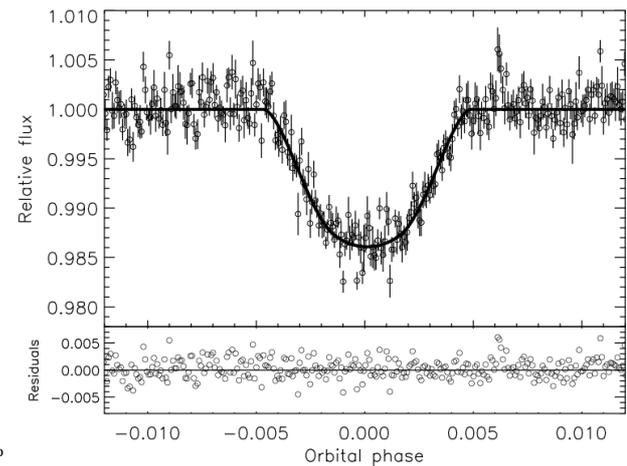
Elle a été observée par le satellite de l'ESA, CoRoT (CONvection, Rotation et Transits planétaires) et par le télescope de 3,6m de l'ESO à la Silla avec le spectrographe HARPS (High Accuracy Radial velocity Planet Searcher).

#### Document 1 : La courbe de lumière



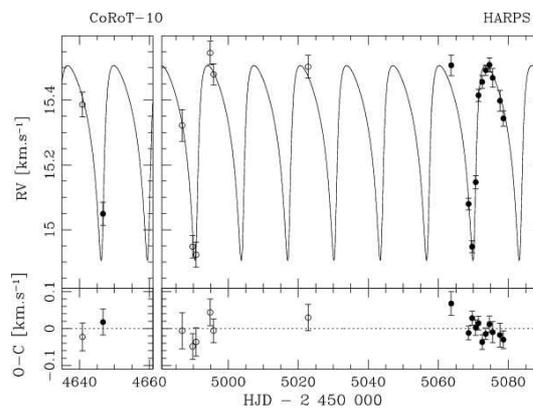
et al.

#### Document 2 : La courbe de lumière "repliée"



et al.

#### Document 3 : La courbe de variation de vitesse radiale



Harps

## Méthode pour chaque document

1. Observer et décrire la courbe.
2. Insertion de l'image dans GeoGebra.
3. Détermination de l'échelle de l'image.
4. Pointages de points remarquables et calculs.

## Détermination de la période orbitale et du demi-grand axe de l'orbite de la planète : document 1

### Première observation du document

Chaque point correspond à une mesure. les mesures sont espacées de 512s.

Observer et décrire la courbe.

Quelle peut être l'origine des baisses soudaines et brèves de flux? Combien en observe-t-on? Donner une estimation de leur fréquence.

Remarque : Le flux relatif semble globalement diminuer. C'est un effet de l'instrument.

### Insertion de l'image

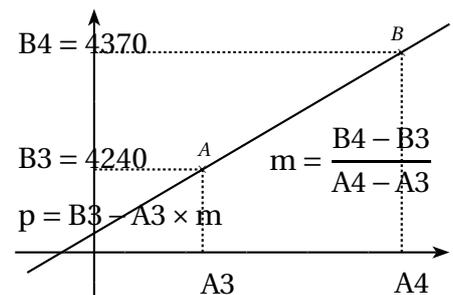
1. Ouvrir une fenêtre GeoGebra. Ouvrir le fichier periodes.ggb
2. Dans la zone de saisie en bas de l'écran entrer :  
**A=(0,0) et B=(400,0)**  
 Ces deux points permettront de caler l'image et d'avoir son échelle en pixels.
3. Insérer l'image lightcurve\_periodes.jpg. (3ème icône à droite, puis menu déroulant et clic dans la zone graphique)
4. Une fois l'image insérée...on la positionne et on la cale. Pour cela, avec le pointeur de la souris sur l'image, faire successivement :
  - clic droit Propriétés image 1,
  - Onglet Position : choisir coin 1 : A coin 2 : B
  - Onglet Basique : choisir objet fixe
 Deux points C et D inutiles ont été créés : on les efface.

### Echelle de l'image

1. Créer un curseur **a** variant de 0 à 400 avec un incrément de 0,1.
2. Créer une droite d'équation  $x = a$ . On la renomme **d<sub>1</sub>**.
3. Ajuster le curseur pour que la droite **d<sub>1</sub>** coïncide avec 4240.
4. Ouvrir la fenêtre tableur.
5. Reporter en cellule A3 la valeur de **a**.
6. Ajuster le curseur **a** pour que la droite **d<sub>1</sub>** coïncide avec 4370.
7. Reporter en cellule A4 la valeur de **a**.
8. On fait l'hypothèse que la relation entre la date et la valeur du curseur est une fonction affine de la forme  $y = mx + p$ .

En cellule D3 on calcule  $m := (B4 - B3) / (A4 - A3)$

En cellule D4 on calcule  $p := B3 - A3 \times D3$



## Estimation de la période orbitale

Le calcul d'une durée moyenne entre deux minimums donne une estimation de la période orbitale.

1. En déplaçant le curseur **a**, on repère au mieux les minimums de flux relatifs. Les 10 valeurs de **a** sont à reporter par ordre croissant en colonne de la cellule A7 à la cellule A16.
2. En cellule B7 on calcule la date en HJD ( jour julien) du premier minimum : =D\$3\*A7+D\$4
3. Etendre la formule de la cellule B7 à la cellule B16.
4. En cellule C8 on calcule la durée en jours entre les deux premiers minimums : =B8-B7.
5. Etendre la formule de la cellule C8 à la cellule C16.
6. En cellule C17, calcul de la durée moyenne entre deux minimums : =Somme [C8 : C16]/9.
7. En cellule D17 on peut faire le calcul de l'écart-type.
8. En cellule A20, faire une estimation de l'erreur sur les valeurs des minimums. En déduire en B20, une estimation de l'erreur sur la durée moyenne entre deux périodes.

## Estimation du demi grand axe de l'orbite de la planète

1. On sait que l'étoile observée à une masse de 0,89 masse solaire.  
En appliquant la troisième loi de Kepler, montrer que si  $T$  est la période orbitale de la planète en années, et  $a$  le demi grand axe de son orbite en ua, on a :

$$a = (0,89T^2)^{\frac{1}{3}}.$$

2. En cellule B27 calculer le demi grand axe de l'orbite de l'exoplanète en ua :  
= (0,89 C17 ^ 2/365,25 ^ 2) ^ (1/3)

## Détermination du rayon de la planète et de sa vitesse orbitale : document 2.

Les cycles de la planète ont été superposés et la figure est centrée sur le moment du passage de la planète devant l'étoile à proprement parler.

On suppose ici que la ligne de visée est dans le plan de l'orbite de la planète, c'est à dire que l'inclinaison du plan de l'orbite de la planète par rapport à la ligne de visée est nulle.

On reprend les trois premiers points du chapitre précédent.

- Observation du document.
- Insertion de l'image lightcurve\_periodes.png dans une fenêtre GeoGebra :fichier rayon\_travail.ggb. Ici, les coins de l'image sont choisis par exemple avec  $\mathbf{A}=(0,0)$  et  $\mathbf{B}=(10,0)$ .
- Echelle de l'image : on fera varier le curseur **a** de -10 à 10 avec un pas de 0,01

## Estimation de la durée du transit de la planète devant l'étoile

En s'inspirant de la méthode employée pour le document 1, calculer la durée du transit de la planète devant l'étoile. ( voir trame dans tableur)

On utilisera comme période orbitale le résultat obtenu à l'aide du document 1.

## Estimation du minimum de flux relatif et du rayon de la planète

La variation de flux est directement égale au rapport des surfaces , c'est à dire au carré du rapport des rayons planète/étoile. On a :

$$\frac{R_p}{R_\star} = \sqrt{\frac{\Delta\phi}{\phi}}.$$

1. Détermination de l'échelle en ordonnée
  - a. Créer un curseur **b** variant de 1 à 10 avec un incrément de 0,001.
  - b. Créer la droite d'équation  $y = \mathbf{b}$ .
  - c. Reporter la valeur de **b** correspondant à 1 d'ordonnée en F3.
  - d. Reporter la valeur de **b** correspondant à 0.980 d'ordonnée en F43.
  - e. Calculer l'échelle en ordonnée en suivant la méthode vue précédemment. ( Cellules I3 et I4)
2. En déplaçant le curseur **b**, on repère au mieux le minimum de flux relatif. La valeur de **b** est à reporter en cellule G7.
3. Calculer le flux relatif correspondant en H7 et en H8 la diminution du flux relatif correspondant :  $= 1 - H7$ .
4. En G9 calculer le rapport RayonPlanète/Rayon \* :  $= \text{sqrt}(H8)$
5. En G10 calculer le rapport Rayon Planète/Rayon Jupiter

### Vitesse orbitale de la planète

1. En faisant l'hypothèse du transit de la planète suivant un diamètre de l'étoile calculer la vitesse orbitale de la planète au moment du transit.
2. Si on fait l'hypothèse que la planète a une orbite circulaire autour de l'étoile, montrer que sa vitesse orbitale est :

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\star}}{a}}$$

Réponse : Si on fait l'hypothèse que la planète de période  $T$  a une orbite circulaire de rayon  $a$  autour de l'étoile , on a :  $2\pi a = vT \iff v = \frac{2\pi a}{T} \iff v^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2}$

Mais d'après la troisième loi de Kepler, on a :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\star}} \iff T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{\star}}$$

$$\text{On en déduit } v^2 = \frac{GM_{\star}}{a} \text{ et } v = \sqrt{\frac{GM_{\star}}{a}}$$

Calculer alors  $v$  et comparer avec la réponse précédente.

### Estimation de la masse de la planète : document 3.

On reprend les trois premiers points du chapitre précédent.

- Observation du document.

Les points de la courbe ont été déduits de l'étude de l'effet Doppler. Que suggère l'allure de la courbe ?

- Insertion de l'image radial\_velocity.png dans une fenêtre GeoGebra :fichier radial\_velocity\_travail.ggb.
- Ici, les coins de l'image sont choisis par exemple avec  $\mathbf{A}=(0,0)$  et  $\mathbf{B}=(250,0)$ .
- Echelle de l'image : on fera varier le curseur **a** de 0 à 250 avec un pas de 0,1.

### Mesure de la période de la planète

En s'inspirant des méthodes vues précédemment calculer une estimation de la période de la planète. Comparer le résultat avec celui obtenu par observation des transits.

### Vitesse radiale

1. Après avoir déterminer l'échelle en ordonnée, calculer la vitesse radiale maximale.
2. En prenant comme vitesse radiale moyenne 15,3km/s, en déduire  $\Delta V$  en km/s

## Calcul de la masse

1. On rappelle que, si on néglige l'inclinaison de la ligne de visée par rapport au plan de l'orbite de la planète, on a :

$$M_P = \sqrt{\frac{M_\star \times a_p}{G}} \times \Delta V$$

Calculer  $M_P$ .

Démonstration de la formule donnant  $M_P$  : Soit  $G$  le centre de masse du système étoile planète.

Avec les notations :

$M_P$  masse de la planète,  $M_\star$  masse de l'étoile,  $M_P \ll M_\star$

$a_p$  la distance de la planète au centre de masse  $G$ .

$a_{R_\star}$ , la distance de la planète au centre de masse  $G$ .

$$a = a_\star + a_p.$$

$$\text{On a : } M_\star a_\star = M_P a_p$$

Le principe fondamental de la dynamique donne pour l'accélération de l'étoile autour du centre de masse  $G$  :

$$F = G \frac{M_\star M_P}{a^2} = M_\star \frac{V_\star^2}{a_\star}$$

$$\text{On en déduit : } V_\star^2 = G \frac{M_\star M_P a_\star}{M_\star a^2} = G \frac{M_P a_\star}{(a_\star + a_p)^2}$$

$$\text{Mais } M_\star a_\star = M_P a_p \iff a_\star = \frac{M_P a_p}{M_\star} \text{ et :}$$

$$V_\star^2 = G \frac{M_P^2 a_\star}{M_\star (a_\star + a_p)^2} = G \frac{M_P^2}{M_\star a_p} \frac{1}{\left(\frac{a_\star}{a_p} + 1\right)^2}$$

Et finalement :

$$V_\star^2 = G \frac{M_P^2}{M_\star a_p} \frac{1}{\left(1 + \frac{M_P}{M_\star}\right)^2}$$

$$\text{Et comme } M_P \ll M_\star : V_\star^2 = G \frac{M_P^2}{M_\star a_p}$$

Et finalement :

$$M_P = \sqrt{\frac{M_\star \times a_p}{G}} \times \Delta V$$

2. Dédurre des résultats précédents une estimation de la densité de l'étoile.

**Réponse :** On a  $\rho = \frac{M_P}{vol_P}$  où  $vol_P = \frac{4}{3}\pi R_P^3$

## **bibliographie, netographie**

Cahiers Clairaut :

- n°117 p 17 à 23 Détection de planètes extrasolaires par la méthode des vitesses radiales ; A.Sarkissian OHP
- n°118 p 30 et 31 Détection de planètes extrasolaires par la méthode des vitesses radiales ; corrigé du n° 117 par G.Paturel et E.Wiernli
- n°131 p 30 à 32 L'effet Doppler et les lois de Kepler : les clés de la découverte d'autres terres ; C.Ferrari Université Paris Diderot
- des articles scientifiques sur la découverte d'exoplanètes :  
[https://corot.cnes.fr/fr/COROT/publis2\\_res\\_sciel.htm](https://corot.cnes.fr/fr/COROT/publis2_res_sciel.htm)
- le satellite CoRot : <https://corot.cnes.fr/fr/>
- l'instrument HARPS : <http://www.eso.org/sci/facilities/lasilla/instruments/harps.html>