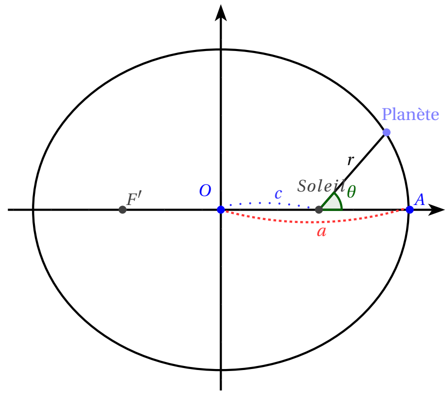
1 Lois de Kepler , lois de Newton ...

1.1 Les lois de Kepler

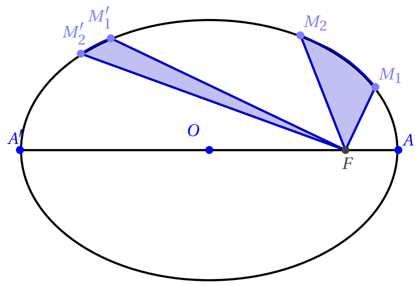
• Première loi :



Les planètes décrivent une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)}$$

• Deuxième loi :



Le rayon Soleil-Planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

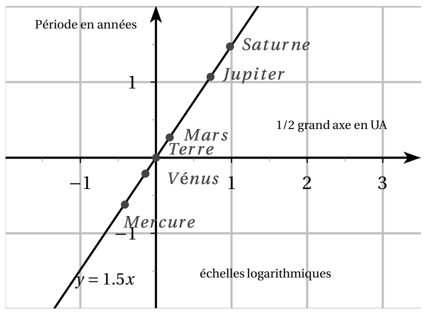
$$\frac{dS}{dt} = \text{constante.}$$

• Troisième loi :

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{cste}$$

Planète	a en ua	P en année
Mercure	0.387	0.241
Vénus	0.723	0.615
Terre	1	1
Mars	1.524	1.882
Jupiter	5.202	11.86
Saturne	9.555	29.46



1.2 Les lois de Newton

• Loi de la gravitation universelle :
Deux corps quelconques s'attirent en raison directe de leur masse et en raison inverse du carré de la distance de leurs centres de gravité.

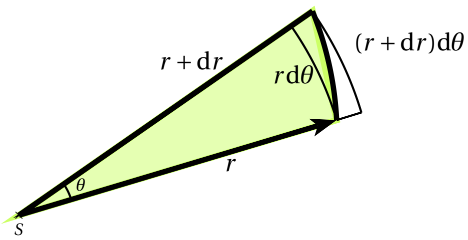
• Première loi de Newton ou principe de l'inertie (initialement formulé par Galilée) :
Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie G d'un solide soumis à un ensemble de forces dont la somme vectorielle est nulle est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme (le vecteur vitesse demeure constant).

• Deuxième loi de Newton (ou théorème du centre d'inertie) :
Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un objet ponctuel est égale au produit de la masse de l'objet par son vecteur accélération.

• Troisième loi de Newton :
Lorsqu'un solide S_1 exerce une force sur un solide S_2, le solide S_2 exerce sur le solide S_1, la force directement opposée.

2 Deuxième loi de Kepler : la loi des aires

On considère un corps céleste P de masse m soumis à l'attraction d'un corps céleste S de masse M. Il est soumis à une force d'attraction $\vec{F}$.



Passons en coordonnées polaires.
On a $r = f(\theta)$ et l'aire balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant l'intervalle de temps dt est telle que :

$$\frac{1}{2} r \times r d\theta \leqslant dS \leqslant \frac{1}{2}(r+\mathrm{d}r) \times (r+\mathrm{d}r)d\theta.$$

On en déduit :

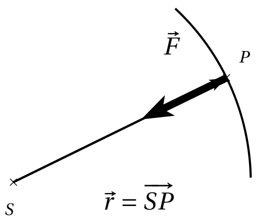
$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Et :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.(1)$$

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ (variation de la quantité de mouvement)}.$$

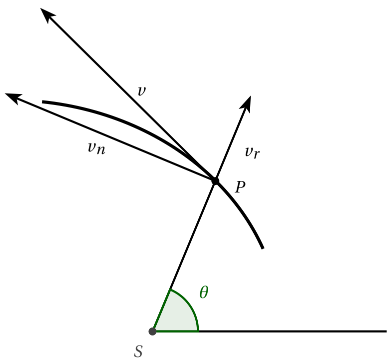


Le moment cinétique $\vec{\sigma}$ est le moment de la quantité de mouvement, autrement dit :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}.$$

Comme $\vec{F}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires, on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}.$$



Le moment cinétique est constant.

On a $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n$.

$\vec{v}_r$ et $\vec{r}$ sont colinéaires et $\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge m\vec{v}_n$..
Mais $||\vec{v}_n|| = r\dfrac{d\theta}{dt}$, alors

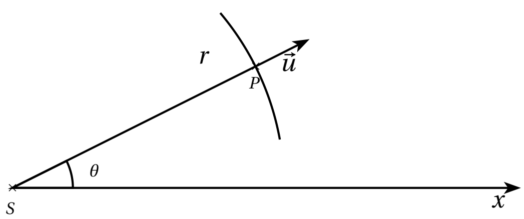
$$\sigma = mr^2\frac{d\theta}{dt} = \text{constante}.(1')$$

De (1) et (1'), on déduit :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sigma}{2m} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante}.(2)$$

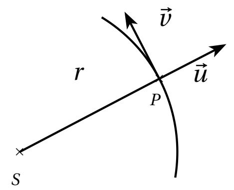
3 Première loi de Kepler.

3.1 Trajectoire d'un corps soumis à une accélération centrale.



On considère un corps céleste P de masse m soumis à l'attraction d'un corps céleste S de masse M.
On note : $SP = r$, $\overrightarrow{SP} = \vec{r}$ et $\vec{u} = \dfrac{1}{r}\vec{r}$.
Le rayon vecteur $\overrightarrow{SP} = \vec{r}$ du corps céleste P de masse m soumis à l'attraction du corps céleste S de masse M varie constamment mais l'énergie totale de P reste constante.

On sait que l'énergie totale est : $E_{tot} = E_C + E_P$ avec l'énergie cinétique : $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2$ et l'énergie potentielle : $E_P = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r}$.



On considère le repère mobile $\left(P, \vec{u}, \vec{u'}\right)$. De $\overrightarrow{SP} = r\,\vec{u}$, on déduit par dérivation :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u'}.$$

On a donc : $||\vec{v}||^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$.

Et par conséquent :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

D'après la loi des aires : $\frac{dS}{dt}$ est une constante, on en déduit donc que : $r^2\frac{d\theta}{dt}$ = constante = K.
Et finalement :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{r^2}.$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie totale, on obtient :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{K}{r^2}\right)^2\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

Ou encore :

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r}.$$

Effectuons un changement de variable...On a :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{r^2} \times \frac{dr}{d\theta}.$$

On en déduit une autre expression de l'énergie totale :

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{K}{r^2} \times \frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{K^2}{r^2}\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\frac{K^2}{r^2}\left(\frac{1}{r^2} \times \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + 1\right) - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

Effectuons un autre changement de variable en posant :

$$\frac{1}{r} = u.$$

On a alors en différenciant par rapport à θ : $-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}$ dont on déduit : $\frac{dr}{d\theta} = -r^2\frac{du}{d\theta}$.

On en tire une autre expression de l'énergie totale en fonction de u :

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \frac{1}{2}mK^2u^2\left(r^2\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + 1\right) - \mathcal{G}Mmu \\ &= \frac{1}{2}mK^2\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) - \mathcal{G}Mmu \end{aligned}$$

L'énergie totale est constante, alors si on dérive l'expression précédente par rapport à θ, on obtient :

$$\begin{aligned} & 0 = \frac{1}{2}mK^2\left(2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + 2u\frac{du}{d\theta}\right) - \mathcal{G}Mm\frac{du}{d\theta} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = mK^2\left(\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\frac{du}{d\theta}\right) - \mathcal{G}Mm\frac{du}{d\theta} \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = m\frac{du}{d\theta}\left(K^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) - \mathcal{G}M\right) \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = K^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) - \mathcal{G}M \\ \Leftrightarrow\quad & K^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = \mathcal{G}M \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \mathcal{G}\frac{M}{K^2} \end{aligned}$$

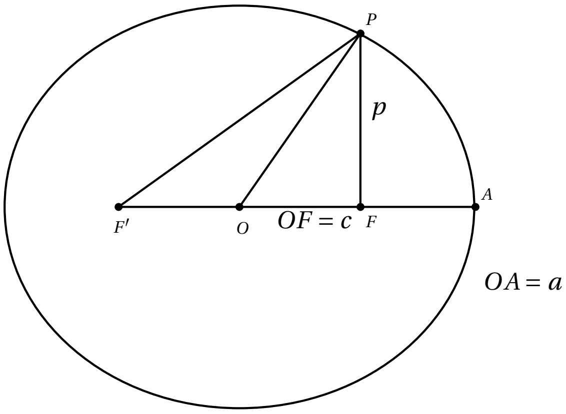
Cette équation différentielle admet comme solution : $u = \dfrac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \mathscr{G}\dfrac{M}{K^2}$.
On en déduit : $r = \dfrac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) + \mathscr{G}\dfrac{M}{K^2}}$.
On pose :(3) $\dfrac{1}{p} = \mathscr{G}\dfrac{M}{K^2}$,(4) $e = Ap$; ce qui donne :

$$r = \frac{p}{e\cos(\theta-\theta_0)+1}.$$

On reconnait l'équation polaire d'une conique d'excentricité e, de paramètre p, où θ_0 est l'angle que fait le grand axe de la conique avec l'axe polaire à l'origine des temps.

- Si $e = 0$, la conique est un cercle.
- Si $0 < e < 1$, la conique est une ellipse.
- Si $e = 1$, la conique est une parabole.
- Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

3.2 Cas de l'ellipse



Prenons : $\theta_0 = 0$ et $r = \dfrac{p}{e\cos\theta + 1}$.
Avec $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = p = PF$.
Par définition de l'ellipse on a : $PF = p$, $PF + PF' = 2a$ et comme $\widehat{PFF'} = 90^o$: $FF'^2 + PF^2 = PF'^2$.
On en déduit :

$$\begin{cases} p + PF' = & 2a \\ p^2 + (2c)^2 = & PF'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PF' = & 2a - p \\ p^2 + (2c)^2 = & (2a-p)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} PF' = & 2a - p \\ p^2 + 4c^2 = & 4a^2 - 4ap + p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PF' = & 2a - p \\ c^2 = & a^2 - ap \end{cases}$$

Mais $e = \dfrac{c}{a}$ et $c^2 = e^2a^2$, alors $p = a - ae^2 = a(1-e^2)$ et finalement :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{e\cos\theta + 1}.$$

- Périhélie pour $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ et $r = a(1-e)$
- Aphélie pour $\theta = 180^o$, $\cos\theta = -1$ et $r = a(1+e)$

4 Troisième loi de Kepler

On a vu que :

$$r = \frac{p}{e\cos(\theta-\theta_0)+1}, \text{où} p = a(1-e^2).$$

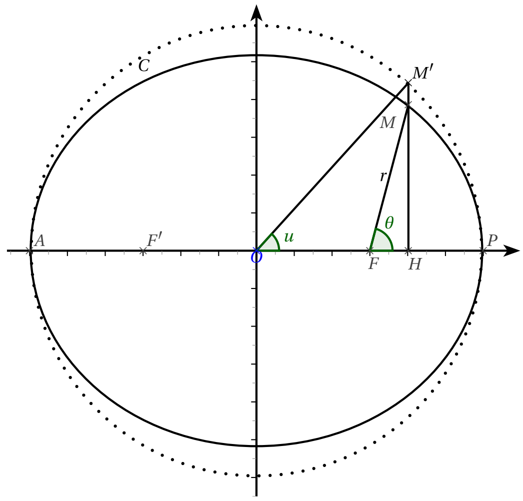
D'après (2) $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{K}{2}$ et en intégrant : $S(t) = \dfrac{\sigma}{2m}t = \dfrac{K}{2}t$.
Sur une période P pour une ellipse de grand axe a et de petit axe b, on a : $S(P) = \pi ab = \dfrac{K}{2}P$ et (6) :$(\pi ab)^2 = \left(\dfrac{K}{2}P\right)^2$.
On a vu au 3.2 que : $p = a(1-e^2)$.
De (3), on déduit : $K^2 = \mathscr{G}Mp$ et $K^2 = \mathscr{G}Ma(1-e^2)$.

D'autre part : $b^2 = a^2(1-e^2)$, alors (6) donne :

$$\begin{aligned} \pi a^2 \times a^2(1-e^2) = \frac{K^2}{4}P^2 \quad & \Leftrightarrow \quad \pi^2 a^2 \times a^2(1-e^2) = \frac{K^2P^2}{4} \\ & \Leftrightarrow \quad \pi^2 a^2 \times a^2(1-e^2) = \frac{\mathscr{G}Ma(1-e^2)P^2}{4} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{\mathscr{G}Ma(1-e^2)P^2}{4}\pi^2 a^3 = \frac{\mathscr{G}MP^2}{4} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{P^2} = \frac{\mathscr{G}M}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

5 Orbite des planètes et équation de Kepler.

E est une ellipse d'excentricité e, de centre O de grand axe a , de petit axe $b = a\sqrt{1-e^2}$ et de foyers F et F'.
On considère C le cercle de centre O et de rayon a.
M' est le point de C qui a même abscisse que le point M de l'ellipse.
On va remplacer r et θ par une variable unique : l'**anomalie excentrique** u, où u est l'angle que forme le rayon OM' avec avec l'axe des abscisses.
On va exprimer r en fonction de u et $\dfrac{d\theta}{dt}$ en fonction de u.



5.1 Expression de r en fonction de u.

Soit y l'ordonnée de M et y' celle de M'.
Pour M, on a : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Pour M' on a : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{a^2} = 1$.
En soustrayant terme à terme ces deux relations, on obtient : $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{y'^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{y}{y'} = \dfrac{b}{a}$.
Or $b = a\sqrt{1-e^2}$, alors $\dfrac{y}{y'} = \sqrt{1-e^2}$.
De $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM}$, on déduit : $x = a\cos u = c + r\cos\theta \Leftrightarrow r\cos\theta = a\cos u - c = a(\cos u - e)$.
De $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM'}$, on déduit : $y' = a\sin u \Leftrightarrow \dfrac{y}{\sqrt{1-e^2}} = a\sin u \Leftrightarrow \dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{1-e^2}} = a\sin u \Leftrightarrow r\sin\theta = a\sin u\sqrt{1-e^2}$.
On a les deux relations :

$$\begin{cases} r\cos\theta = & a(\cos u - e) \\ r\sin\theta = & a\sin u\sqrt{1-e^2} \end{cases}$$

On élève au carré et on ajoute terme à terme ; on obtient :
$r^2 = a^2(\cos u - e)^2 + a^2\sin^2 u(1-e^2) = a^2(\cos^2 u - 2e\cos u + e^2 + \sin^2 u - e^2\sin^2 u = a^2(1-2e\cos u + e^2\cos u) = a^2(1-e\cos u)^2$.
On a finalement :

$$(I) : r = a(1 - e\cos u).$$

5.2 Expression de $\dfrac{d\theta}{dt}$ en fonction de u.

$$\begin{cases} r\cos\theta = & a(\cos u - e) \\ r = & a(1 - e\cos u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\left(\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = & a(\cos u - e) \\ r\left(\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = & a(1 - e\cos u) \end{cases}$$

Par addition et par soustraction des égalités précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} 2r\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = & a(\cos u - e + 1 - e\cos u) \\ 2r\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = & a(1 - e\cos u - \cos u + e) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = & a(1-e)(1+\cos u) \\ 2r\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = & a(1+e)(1-\cos u) \end{cases}$$

On en déduit : $\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{a(1+e)(1-\cos u)}{a(1-e)(1+\cos u)} = \dfrac{1+e}{1-e}\dfrac{1-\cos u}{1+\cos u} = \dfrac{1+e}{1-e}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{u}{2}\right)} = \dfrac{1+e}{1-e}\tan^2\left(\dfrac{u}{2}\right)$
On a finalement :

$$(II)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{u}{2}\right).$$

Comme $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{du}\dfrac{du}{dt}$, par différenciation de (II), on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{du}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}.$$

Mais on a vu que $2r\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = a(1-e)(1+\cos u)$.

$$\begin{aligned} r^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a(1-e)(1+\cos u) \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{2r}(1-e)(1+\cos u) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{a}{r}(1-e)\cos^2\left(\frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{du}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)} \Leftrightarrow \frac{d\theta}{du} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{a}{r}(1-e).$$

Mais $(I) : r = a(1-e\cos u)$, alors :

$$\frac{d\theta}{du} = \sqrt{1-e^2}\frac{1}{1-e\cos u}.$$

Et finalement :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\frac{du}{dt}.$$

5.3 Equation de Kepler.

D'après la loi des aires, $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = K$, où K constante des aires.
Avec $r = a(1-e\cos u)$ et $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\dfrac{du}{dt}$, on a :

$$a^2(1-e\cos u)^2\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\frac{du}{dt} = K \Leftrightarrow a^2(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\frac{du}{dt} = K.$$

Mais $\pi ab = \dfrac{K}{2}P$ et $b = a\sqrt{1-e^2}$ alors $K = \dfrac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}$, et :

$$(1-e\cos u)\frac{du}{dt} = \frac{2\pi}{P} \Leftrightarrow (1-e\cos u)du = \frac{2\pi}{P}dt.$$

En intégrant, on obtient : $u - e\sin u = \dfrac{2\pi}{P}(t-t_0)$; c'est l'équation de Kepler.
Soit $M = \dfrac{2\pi}{P}(t-t_0)$,l'**anomalie moyenne** ; l'équation de Kepler s'écrit :

$$(III) : u - e\sin u = M$$