

par la Lune et par le Soleil doivent entrer en ligne de compte dans de rares expériences de haute précision et pour expliquer le phénomène des marées qui affecte les vastes surfaces des océans. Par suite :

En Mécanique terrestre les actions de gravitation extra-terrestres sont presque toujours négligeables.

11-7. Détermination de la constante de gravitation.

Une mesure directe de la constante de gravitation G s'effectue en déterminant l'attraction qui s'exerce entre deux masses connues de dimensions usuelles. Les méthodes les plus précises mettent en œuvre des sphères métalliques homogènes pour que dans le calcul on puisse les remplacer par deux points matériels de mêmes masses placés en leurs centres. Les forces à mesurer étant très faibles, les dispositifs employés doivent être très sensibles.

La balance ordinaire donne une très médiocre précision mais le principe de son emploi n'est pas dépourvu d'intérêt. L'expérience de von Jolly est reprise en intercalant entre les deux couples de ballons une masse attractive constituée par un mur horizontal de plomb. Dans les expériences de Richarz et Krüger-Menzel effectuées à la forteresse de Spandau en 1898, le mur de briques de plomb avait une masse totale de 100 tonnes.

Les méthodes les plus précises (méthode statique et méthode dynamique) sont basées sur l'emploi d'une balance de torsion.

1° Principe d'une méthode statique. Expériences de Cavendish.

La méthode a été mise en œuvre pour la première fois par Cavendish en 1798. La balance de torsion (fig. 115) comporte une tige légère de longueur $AB = 2l$ portant à ses extrémités deux petites sphères métalliques A et B de masses égales à m ; cette tige est suspendue en son milieu O par un fil de torsion OO' . Un miroir M est fixé au milieu O de la tige de façon à permettre la mesure des rotations par la méthode optique.

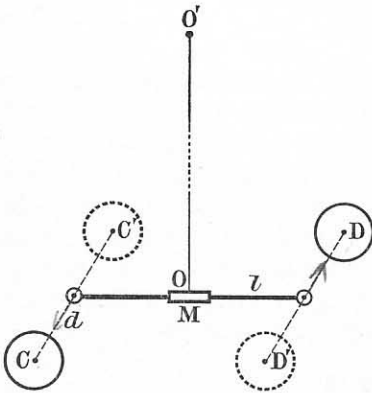


FIG. 115.

Après avoir mesuré la constante de torsion C du fil et repéré la position d'équilibre on installe dans le plan horizontal de la tige deux grosses sphères de masses égales à M au voisinage et de part et d'autre des petites sphères. Dans ces conditions les effets des forces d'attraction

sont concordants pour donner au fil la torsion α qui se mesure en repérant la nouvelle position d'équilibre, position pour laquelle on mesure également la distance $AB = BD = d$.

On améliore la précision en amenant ensuite les grosses masses dans les positions symétriques C' et D' , et en repérant le nouvel équilibre, ce qui donne 2α puisque le fil a subi la même torsion en sens inverse.

La condition d'équilibre s'exprime par l'égalité du moment $C\alpha$ du couple de torsion et du moment Γ des deux forces d'attraction f par rapport à l'axe de rotation :

$$C\alpha = \Gamma = 2fl = 2\mathcal{G} \frac{mM}{d^2} l.$$

Cette relation donnant \mathcal{G} doit être corrigée pour tenir compte des forces d'attraction exercées par chacune des grosses masses sur la petite masse située à l'autre extrémité de la tige (C sur B et D sur A). Compte tenu de la loi de l'inverse carré de la distance, cette correction est faible; elle n'est cependant pas négligeable.

La constante C de torsion se détermine par la mesure de la période des petites oscillations de la balance en l'absence des grosses masses.

Le dispositif de Cavendish a été amélioré par différents expérimentateurs mais les perfectionnements essentiels ont été apportés par Boys (1895).

2° Expériences de Boys (1895).

Cavendish avait cru bon d'utiliser une longue tige de bois ($2l = 20$ cm et même 2 m) de façon à accroître le moment du couple des forces d'attraction. Boys a montré qu'il était au contraire avantageux non seulement de réduire la longueur du fléau ($2l = 2,3$ cm) mais aussi de diminuer les masses m (de 1 à 4 g au lieu de 50 g). Indépendamment d'autres avantages que nous allons montrer, les dimensions réduites de l'appareil permettaient de placer celui-ci dans une enceinte à température constante et bien protégée des courants d'air, de sorte que les mesures non perturbées pouvaient être de longue durée.

Nous avons dit que la constante de torsion se mesurait à partir de la période T des oscillations de la balance; celle-ci a pour expression, $J = 2ml^2$ étant sensiblement le moment d'inertie de l'équipage par rapport à l'axe de rotation,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{2ml^2}{C}}, \quad \text{d'où} \quad C = \frac{8\pi^2 ml^2}{T^2},$$

et

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2 d^2} \cdot \frac{T^2}{l}.$$

La mesure de G ne peut être précise que si α n'est pas trop petit, sinon l'incertitude sur sa valeur serait grande du fait d'une médiocre incertitude relative $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$. L'expression de α montre que, pour une valeur

donnée de la période T , α est indépendant de m et d'autant plus grand que le fléau est plus court. m sera donc choisi assez petit pour que le fil de torsion puisse être très fin. m et l étant ainsi choisis, le moment d'inertie $J = 2ml^2$ est certes petit mais l'on peut cependant ne pas trop réduire la période T parce qu'il va être possible d'utiliser un fil de faible constante de torsion.

En effet, cette constante est donnée par la formule de Coulomb,

$$C = \gamma \frac{\delta^4}{L},$$

dans laquelle δ est le diamètre du fil, L sa longueur, γ la constante spécifique de torsion du matériau employé. Boys utilisait un fil de quartz de diamètre $\delta = 0,002$ mm, alors que celui du fil d'argent de la balance de Cavendish était $\delta' = 0,05$ mm, de sorte que la finesse du fil intervenait pour diviser C par

$$\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^4 \simeq 400\,000$$

et par suite pour multiplier le carré de la période par ce même facteur. Le quartz présente en outre sur l'argent les avantages d'être plus tenace et de ne pas conserver de torsion résiduelle (hystérésis de torsion).

Toutefois, avec un fléau très court, le terme correctif résultant de l'action des masses M sur la petite masse opposée prendrait une trop grosse importance, pour le réduire Boys avait placé les masses A et C (fig. 116) à un niveau distant verticalement de 15 cm de B et D .

Utilisons les données d'une expérience de Boys pour fixer des ordres de grandeur et pour apprécier la précision. Effectuons les calculs dans le système S.I. et prenons $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ S.I. Nous avons

$$M = 7,5 \text{ kg}; \quad m = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg}; \quad d = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

ce qui donne

$$f \simeq 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ newton}; \quad 2,4 \cdot 10^{-4} \mu\text{N}$$

cette force représente sensiblement le poids d'une masse de $2,4 \cdot 10^{-3}$ mg. La force d'attraction est donc extrêmement faible.

On obtient à peu près la même force avec 2 masses de plomb de 0,1 kg = 100g à une distance de $5,1 \cdot 10^{-2}$ m (2 fois le rayon)

Sphère de 2,5 cm de diamètre

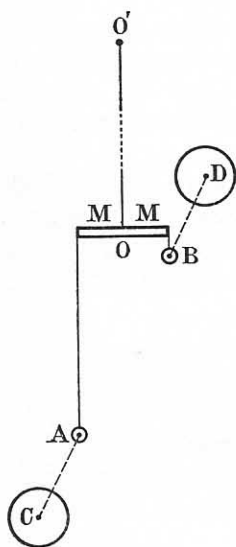


FIG. 116.

La période T est de l'ordre de 3 minutes et $2l = 2,3 \cdot 10^{-2}$ m, par suite,

$$2\alpha = \frac{\mathcal{G}M}{\pi^2 d^2} \cdot \frac{T^2}{2l} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \times 7,5 \times (180)^2}{9,87 \times (7,5)^2 \cdot 10^{-4} \times 2,3 \cdot 10^{-2}} \simeq 0,013 \text{ radian,}$$

ce qui donne, sur une échelle placée à 7 mètres, une déviation de l'ordre de 9 cm. Celle-ci peut être mesurée avec une incertitude relative de l'ordre de $5 \cdot 10^{-4}$.

En définitive, compte tenu des incertitudes plus faibles sur les mesures de M , d , T et $2l$, Boys a pu donner une valeur de \mathcal{G} avec une précision relative de l'ordre du millième :

$$\mathcal{G} = (6,663 \pm 0,007) 10^{-11} \text{ S.I.}$$

3° Méthodes des oscillations. Mesures de Heyl.

La méthode de Cavendish n'est déjà pas purement statique puisqu'elle nécessite la mesure de la période T en l'absence des masses M . La méthode des oscillations, que nous ne décrirons pas, est une méthode dynamique en ce sens que la mesure statique de la rotation α de la balance de torsion est remplacée par deux mesures de périodes d'oscillation en présence de masses M placées successivement dans deux positions perpendiculaires par rapport au fléau.

Les mesures les plus récentes (1927-1930) utilisant cette méthode ont été effectuées par P. R. Heyl au Bureau of Standards de Washington. La balance était placée dans un vide assez poussé de façon à réduire l'amortissement; les mesures de périodes étant de longue durée, celles-ci étaient d'environ 30 et 35 minutes.

Une méthode de résonance (J. Zahradnicek, 1933) met en œuvre deux balances de torsion coaxiales; c'est donc également une méthode dynamique.

Après discussion (1941) on a admis la valeur la plus probable

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= (6,670 \pm 0,005) 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \text{ (S.I.)} \\ &= (6,670 \pm 0,005) 10^{-8} \text{ dyne.cm}^2 \cdot \text{g}^{-2} \text{ (C.G.S.).} \end{aligned}$$

L'incertitude relative sur cette valeur serait donc d'environ $7,5 \cdot 10^{-4}$.

11-8. Masse et densité de la Terre.

La masse de la Terre se calcule à partir de la constante de gravitation et de l'intensité g de la pesanteur (mesurée par une méthode dynamique) par application de la loi de la gravitation :

$$M = \frac{GR^2}{\mathcal{G}} \simeq \frac{gR^2}{\mathcal{G}}.$$

On en déduit la masse volumique moyenne de la Terre :

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{M}{R_3^3} = \frac{3g}{4\pi R_3^2}.$$

En prenant $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$ et $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$, on trouve

$$M \simeq 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \quad \rho \simeq 5\,520 \text{ kg.m}^{-3}.$$

ρ étant très supérieur à la masse volumique moyenne, $2\,700 \text{ kg.m}^{-3}$, des roches de l'écorce terrestre, il faut en conclure que les matériaux du noyau central sont très denses.

Les résultats de l'étude du mouvement des astres (Mécanique II) joints à la connaissance de la masse de la Terre permettent de calculer les masses de la Lune, du Soleil, des planètes et de leurs satellites. On a pu dire que la balance de torsion a servi à « peser le Monde ».

11-9. Gravimètres statiques.

Un gravimètre est destiné à la mesure d'une variation Δg de l'intensité g de la pesanteur d'un point à un autre; un gravimètre statique est un dynamomètre très sensible qui permet de déterminer cette variation par celle, $\Delta P = M\Delta g$, du poids d'une masse déterminée. Nous allons voir qu'une très grande sensibilité s'obtient à l'aide de dispositifs dont l'équilibre est quasi astatique grâce à l'emploi d'un « ressort de longueur nulle ».

Un ressort ordinaire exerce une force nulle pour une longueur l_0 et la traction F pour la longueur l est proportionnelle à son allongement : $F = k(l - l_0)$; pour un ressort de longueur nulle on a $l_0 = 0$ et $F = kl$. Un tel ressort est fabriqué en donnant une torsion sur lui-même au fil que l'on enroule sur un cylindre.

Nous donnons ici le principe des *gravimètres Western et North-American*.

Principe.

Un fléau mobile autour d'un axe horizontal O a pour masse totale M (fig. 117). Un ressort R de longueur nulle est attaché par une extrémité à un point fixe O' sur la verticale de O , par l'autre extrémité au centre de gravité G de l'ensemble du fléau. Posons $\widehat{O'OG} = \theta$, $OO' = a$, $OG = b$, $O'G = l$ et $OD = d$.

Dans une position définie par l'angle θ , le fléau est soumis au poids Mg de moment (compté positivement)

$$\Gamma_1 = Mgb \sin \theta,$$

et à la traction $F = kl$ du ressort dont le moment est, en exprimant de deux façons différentes la surface du triangle $OO'G$,

$$\Gamma_2 = -Fd = -kld = -kab \sin \theta.$$

Le moment résultant des forces appliquées au fléau est donc

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 = (Mg - ka) b \sin \theta.$$

Supposons que par construction les quantités M , k , a aient été choisies de telle sorte que $Mg = ka$ en un lieu déterminé (pour une valeur déterminée de g). Le