La trajectoire d'une sonde vers Mars

avec Geogebra

Informations spatiales

La NASA a lancé lundi 18 novembre la sonde Maven [1]
(Mars Atmosphere and Volatile Evolution)
Lancement : 13 h 28, heure locale (19 h 28, heure française) et mise en orbite autour de la Terre.
Départ vers Mars : mardi 19 novembre

Mars Orbiter Mission [2] (abrégé en MOM) ou en sanskrit Mangalyaan
- lancement : 5 novembre 2013
- mise en orbite elliptique très allongée, son orbite est agrandie à chaque passage au périgée.
- départ pour Mars : le 1er décembre 2013.
- durée du voyage : 10 mois.

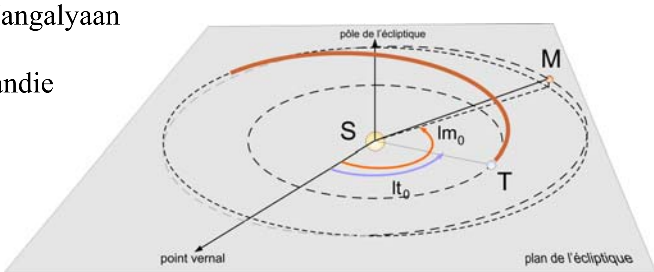


Figure 1 - la trajectoire Terre Mars.

Introduction

Comme tout corps isolé dans le système solaire, une sonde spatiale, lancée dans le système solaire, moteurs éteints, suit une orbite keplérienne : une ellipse dont le Soleil est à l'un des foyers.

A partir de cette simple constatation, il est possible de construire approximativement et simplement les trajectoires qui amèneront les sondes près de la planète Mars : caractéristiques des orbites, temps de parcours.

Présentation et déroulement

Le travail va consister en :
- faire un petit rappel sur les ellipses : paramètres de base et relations
- trouver les relations qui relient caractéristiques de l'orbite de la sonde à celles des orbites de la Terre et Mars
- tracer les orbites des trois corps (Terre, Mars, sonde) sous GeoGebra
- devant les insuffisances de la trajectoire théorique, donner de la souplesse au modèle pour ajuster une meilleure orbite
- faire quelques calcules sur la vitesse de la sonde et sur les dates de lancement

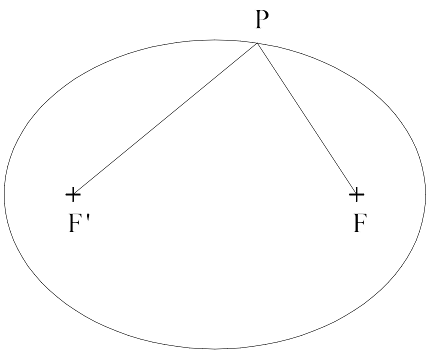


Figure 2 - ellipse.

L'Ellipse

Lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

F et F' sont les foyers de l'ellipse.
PF + PF' = Cte

On définit :
a = OA = OA' : demi-grand axe
b = OB = OB' : demi-petit axe
c = OF = OF'

On pose, c/a = e : excentricité ou ellipticité.

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c = a \cdot e$$
$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

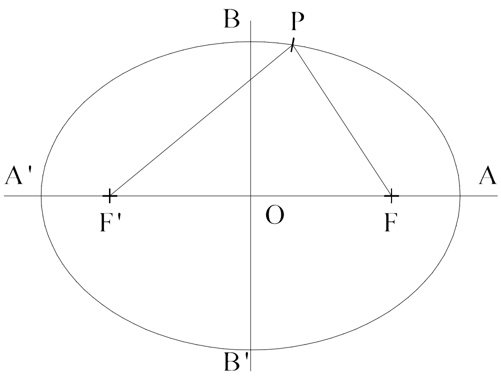


Figure 3 - éléments de l'ellipse.

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/MAVEN_(sonde_spatiale)

[2] http://fr.wikipedia.org/wiki/Mars_Orbiter_Mission

Seule la deuxième relation va nous être utile.

On peut définir la position du point P en coordonnées cartésiennes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mais en Astronomie, où le Soleil est à l'un des foyers de l'ellipse, on utilise les coordonnées polaires
Caractéristiques :

a demi-grand axe
c distance centre foyer
r rayon vecteur
θ anomalie
e = c/a excentricité

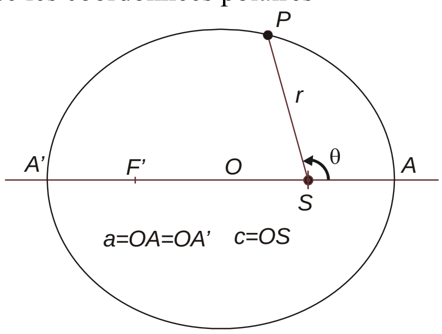


Figure 4 - l'ellipse en coord. polaires

Termes astronomiques

périhélie (A périgée) : SA' = a + c = a (1 - e)
aphélie (A' apogée) : SA = a - c = a (1 + e)

Les lois de Kepler

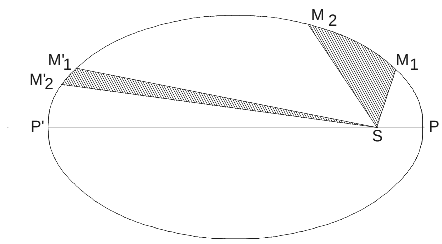


Figure 5 - loi des aires.

I - Les planètes décrivent autour du soleil des orbites elliptiques dont le soleil occupe un des foyers.

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

II - Une ligne joignant une planète au soleil balaye des aires égales en des temps égaux (loi des aires).

III - La période de rotation d'une planète et le demi grand axe de son orbite sont liés par la relation :

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} \cdot \left(M_1 + M_2\right) \quad \text{Ou} \quad \frac{a^3}{P^2} = C^{te}$$

Si la période P est exprimée en années sidérales et a en unités astronomiques (ua) $\frac{a^3}{P^2} = 1$

Orbite de la sonde

◆ Economie d'énergie (carburant) -> orbite képlérienne

◆ Profiter de la vitesse de la Terre sur son orbite
la sonde sera lancée tangentiellement à l'orbite de la Terre.

◆ Éviter de changer de direction : trajectoire dictée par la gravitation

◆ Faire coïncider l'arrivée de la sonde sur la trajectoire avec la position de la planète

Partons d'un problème simple.
Les excentricités des planètes sont faibles, leurs orbites sont assimilées à des cercles
On place

- le Soleil
- le cercle de la Terre
- le cercle de Mars
- l'ellipse de la sonde
- quelques points de repère H et F' les foyers de l'ellipse, et C son centre.

Les dimensions des cercles et ellipses : a_T, a_M, a_S et c_S.

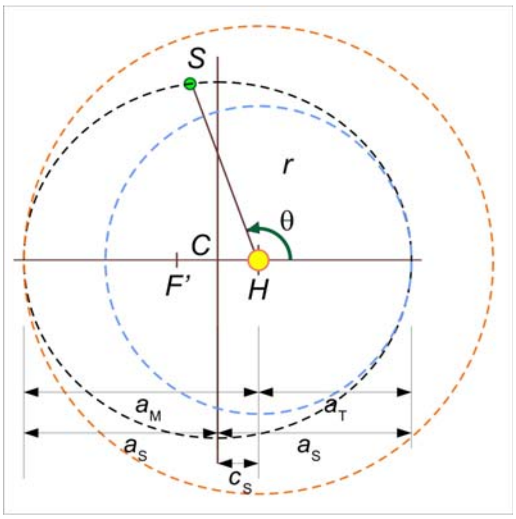


Figure 6 - orbites et caractéristiques.

Eléments de l'orbite de la sonde :

Eléments de l'orbite de la sonde :

$$a_S = \frac{a_T + a_M}{2} \qquad c_S = a_S - a_T = \frac{a_M - a_T}{2} \qquad e_S = \frac{a_S - a_T}{a_S}$$

Sa période orbitale vaut :

$$\frac{a_S^{\ 3}}{P_S^2} = 1 \qquad P_S = \sqrt{a_S^3}$$

(attention aux unités, ici a_S est en ua, le résultats est en années)

Il reste à placer la Terre et Mars à la date du lancement, car à ce moment là, la sonde et la sonde sont au point de tangence de l'orbite de la Terre et de l'ellipse.

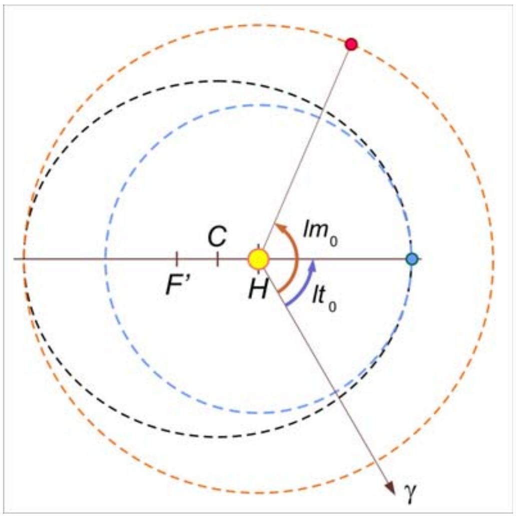


Figure 7 - longitudes à l'origine.

La direction origine : le point vernal ou point γ.

Les longitudes des planètes sont :

lt_0 et **lm_0**

La direction du point γ est la direction origine , l'ellipse est tournée de **lt_0**.

C'est ce que l'on va tracer sous GeoGebra.

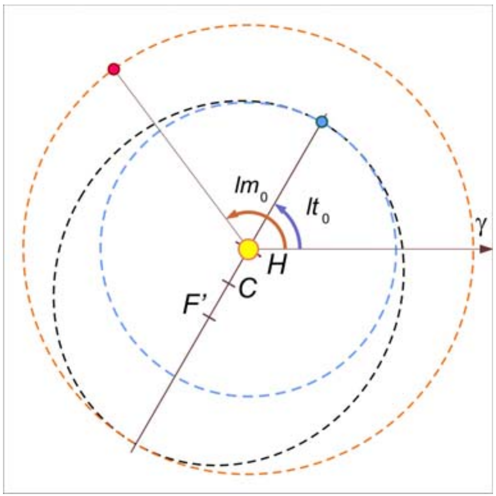


Figure 8 - orientation de l'ellipse.

Pour commencer il nous faut quelques éléments à trouver dans la littérature ou sur Internet :

- les demis-grands axes des orbites de la Terre et de Mars
- les longitudes écliptiques de la Terre et Mars au jour du départ.

On trouve les données des planètes :
http://www.imcce.fr/langues/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages3/376.html

Caractéristiques des planètes

	Terre	*Mars*
Période	365.256	686.980
Demi-grand axe	1	1.5236793

Sur le site de l'IMCCE, on peut faire calculer les positions qui nous intéressent du 1/10/2013 au 1/10/2015.
http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/formulaire/form_ephepos.php

Ephémérides

La page d'Ephémérides en ligne de l'IMCCE nous donne, à la demande, pour de nombreux corps leurs coordonnées dans tous les systèmes de repérage utilisés par les astronomes : local, équatorial, écliptique, coordonnées sphériques, coordonnées cartésiennes, etc.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Terre	Terre	Terre	Mars	Mars	Mars
2	Dates	longitude	latitude	distance	longitude	latitude	distan...
3		(°)	(°)	ua	(°)	(°)	ua
4	01/10/2013	7.79052	-0.00014	1.00125	114.37261	1.67335	1.62357
5	02/10/2013	8.77415	-0.00018	1.00096	114.83205	1.6796	1.62443
6	03/10/2013	9.75838	-0.00023	1.00068	115.29101	1.68572	1.62529
7	04/10/2013	10.74321	-0.00029	1.0004	115.74949	1.69174	1.62614

Les orbites de la Terre et Mars sous GeoGebra

▶ Ouvrir GeoGebra et charger le fichier *terre_mars_ephemerides.ggb*

Dans la partie tableur, on trouve tabulées journellement sur deux ans, les données suivantes :

dates, longitudes, latitudes et distances de la Terre et Mars

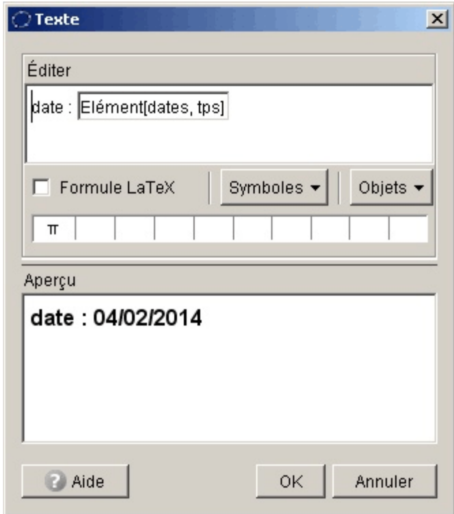


Figure 9 - affichage date.

▶ Créer un curseur temps : **tps** (voir **Créer un curseur** dans les pages *Les éléments de base de GeoGebra*)

Caractéristiques : 1 à 730, incrément 1, largeur 300

▶ Créer la valeur **Δt0 = 49** pour ajuster la date de départ (19/11/2013)

▶ Créer la liste **dates** des cellules **A4** à **A734** (voir **Créer une liste** dans les pages *Les éléments de base de GeoGebra*)

▶ De même que pour les données dates du tableur créer les listes des longitudes de la Terre et de Mars sur la durée de leurs périodes respectives

lterre de **B4** à **B369**

lmars de **E4** à **E691**

▶ Faire afficher la date correspondant à **tps** :

Elément[ldates, tps]

Figure 10 - curseur temps et date.

Pour simplifier le problème, on considère des orbites circulaires.

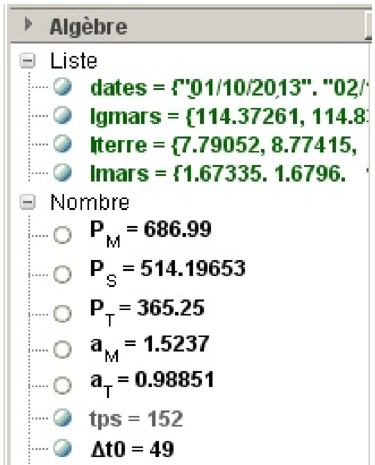


Figure 11 - caractéristiques des orbites des planètes.

▶ Rentrer les données des planètes

Orbite de la Terre	$\mathbf{a_T}$	$\mathbf{P_T}$
Orbite de Mars	$\mathbf{a_M}$	$\mathbf{P_M}$

Longitude de la Terre à la date de départ : **lt_0=Elément[lterre,Dt0]**

▶ Placer le Soleil (point **H**) au centre, couleur jaune et grandeur 7.

H = (0,0)

▶ Tracer les orbites de la Terre et de Mars

c_T = Cercle[H,a_T]
c_M = Cercle[H,a_M]

▶ Mettre en couleur : bleu pour la Terre, rouge pour Mars.

Les planètes sont représentées sous forme de points **T** et **M**.

Dans le **plan xHy**, qui est le plan de l'écliptique, les longitudes sont comptées à partir de **Hx** (direction du point gamma).

▶ On place le point **T** dans GeoGebra par :

T=(a_T ; Elément[lterre, tps]°)
(coordonnées polaires)

De même pour Mars :

M=(Elément[dmars, tps]; Elément[lmars, tps]°)

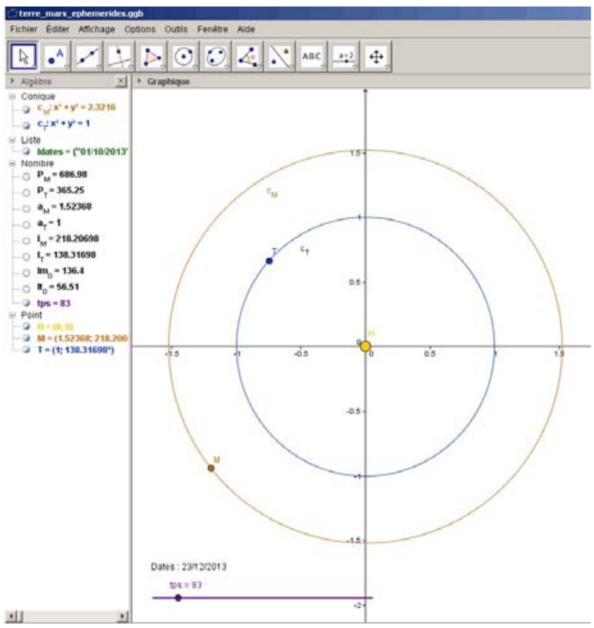


Figure 12 - la Terre et Mars dans la fenêtre graphique.

● Sauvegarder le travail

L'orbite de la sonde

▶ Les éléments de l'ellipse de la sonde sont :

a_S = (a_T + a_M) / 2
P_S = sqrt(a_S^3)*365.25
c_S = a_S - a_T
e_S = c_S / a_S

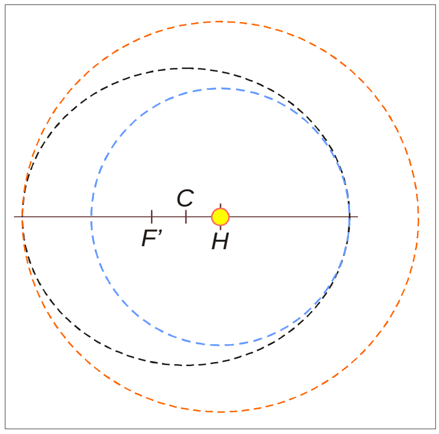


Figure 13 - construction de l'ellipse.

On construit l'ellipse de la sonde comme si la Terre avait la longitude 0. On la fera tourner de **lt_0** après.

La syntaxe de l'ellipse sous Geogebra est :

Ellipse[<Foyer>, <Foyer>, <Demi Longueur Axe Principal>]

Ici les foyers sont **H** et **F'**

H est à l'origine **(0,0)**
F' est à **- 2 c_S** puisque **CH = c_S**
F' = (-2*c_S,0)

Que l'on fait tourner de **lt_0**

traj_S = rotation[Ellipse[H, (-2*c_S,0),a_S],lt_0°]

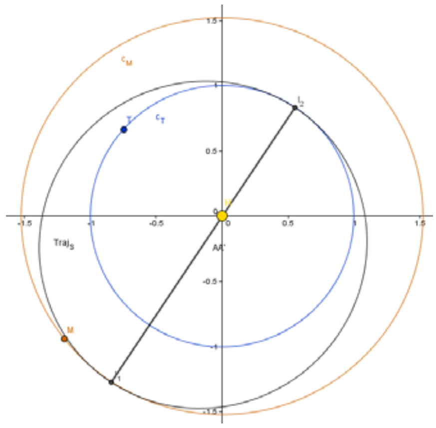


Figure 14 - rotation de l'ellipse.

Tracer la ligne des apsides (**AA'** sur la figure de la page 2 en haut.

Les deux points de la ligne des apsides avec l'ellipse sont à l'intersection de l'ellipse avec l'axe des x que l'on a fait tourner de **lt_0°** :

I = Intersection[rotation[axeX , lt_0°] , traj_S]

qui crée les deux points **I_1** et **I_2**.

Tracer le segment **AA'** de **I_1** à **I_2**

AA' = Segment[I_1,I_2]

Le voyage de la sonde

Pour calculer l'orbite de la sonde, il faut appliquer la loi des aires au déplacement de la sonde, ce qui est assez complexe. Mathématiquement, il faut résoudre l'équation de Kepler :

u –e sin u = M

qui se fait par itérations.

Simplifions le problème en regardant le mouvement angulaire moyen.

Si le résultat n'est qu'approché, il est correct pour la variable temps, aux moments du périhélie et de l'aphélie, juste ce qu'il nous faut.

V_S = 360 / P_S

Position de la sonde à **tps** jours :

α_S = lt_0+ (tps - Δt0)* V_S

Traçons la demi-droite qui part du Soleil dans la direction de la sonde

d_S = DemiDroite[H, (1 ; a_S°)]

La sonde est à l'intersection de **d_S** avec l'ellipse :

S = Intersection[d_S,Traj_S]

Le temps du trajet est la moitié de la période de la sonde.

● Sauvegarder le travail

Constatations

En faisant varier lale temps (curseur **tps**), on s'aperçoit que la sonde n'est pas au rendez-vous.

Que peut-on faire pour être plus réaliste ?

- avoir des orbites de Mars et de la Terre plus réaliste

- pouvoir corriger l'orbite de la sonde
- pouvoir ajuster le départ

Ajustement des orbites Terre et Mars

Au lieu d'utiliser des orbite circulaires, on va se baser sur les éphémérides des deux planètes sur une période complète des orbites de chacune, 365 jours pour la Terre et 687 jours pour Mars.

On a donc dans la partie tableur de Geogebra, pour tracer ces orbites, les longitudes, latitudes et distances.

	A	B	C	D	E	F	G
1		*Terre*	*Terre*	*Terre*	*Mars*	*Mars*	*Mars*
2	*Dates*	*longitude*	*latitude*	*distance*	*longitude*	*latitude*	*distan...*
3		*(°)*	*(°)*	*ua*	*(°)*	*(°)*	*ua*
4	01/10/2013	7.79052	-0.00014	1.00125	114.37261	1.67335	1.62357
5	02/10/2013	8.77415	-0.00018	1.00096	114.83205	1.6796	1.62443
6	03/10/2013	9.75838	-0.00023	1.00068	115.29101	1.68572	1.62529
7	04/10/2013	10.74321	-0.00029	1.0004	115.74949	1.69174	1.62614
8	05/10/2013	11.72863	-0.00035	1.00011	116.20749	1.69763	1.62699

Figure 15 - Les données des éphémérides : dates et positions.

On se place dans le plan de l'écliptique, seules les longitudes et distances nous intéressent. Pour être plus précis, il faudrait prendre la projection sur le plan de l'écliptique, las distances seraient alors multipliées par le cosinus de la latitude.

Cellules des longitudes et distances

	Longitudes		**Distances**	
	cellules	nom liste	cellules	nom liste
Terre	**B4 - B369**	**lterre**	**D4 - D369**	**dterre**
Mars	**E4 - E691**	**lmars**	**G4 - G691**	**dmars**

Ce sont ces positions (en coordonnées polaires) qui vont permettre de tracer les orbites sous forme de suite de segments.

▶ Création des données sous forme de listes données dans le tableau ci-dessus :

Il nous reste à créer les listes des distances : **dterre** et **dmars**

Liste
dmars = {1.62357, 1.62443, 1.6
dterre = {1.00125, 1.00096, 1.00
dates = {"01/10/2013", "02/10/2
lmars = {114.37261, 114.83205,
lterre = {7.79052, 8.77415, 9.75

Figure 16 - les listes des données.

▶ **Tracé des orbites Terre et Mars**

Cacher les cercles orbites $\mathbf{c_T}$ et $\mathbf{c_M}$

Construire les séquences de segments des deux orbites connaissant la syntaxe d'un segment :

Segment[<Point1>, <Point2>]

traj_T = Séquence[
Segment[
(Elément[dterre, i]; Elément[lterre, i]°), (Elément[dterre, i + 1]; Elément[lterre, i + 1]°)], i, 1, P_T]
(----------------------Point 1--------------) (------------------------ Point 2---------------------)

Idem pour Mars :

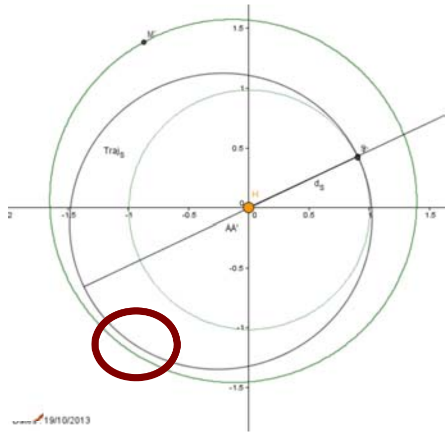
traj_M = Séquence[
Segment[
(Elément[dmars, i]; Elément[lmars, i]°), (Elément[dmars, i + 1]; Elément[lmars, i + 1]°)], i, 1, P_M]

▶ Placer les planètes en fonction du curseur **tps**

T' = (Elément[dterre, tps]; Elément[lterre, tps]°)
M' = (Elément[dmars, tps] ; Elément[lmars, tps]°)

Il faut aussi ajuster la distance Terre Soleil à la date de lancement :

a_T = Elément[dterre, Δt0]



Conclusions

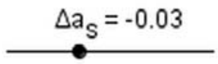
L'ellipse de l'orbite théorique précédemment tracée ne convient pas, car avec l'excentricité de l'orbite de Mars, pour le jour de départ choisi, elle n'atteint pas l'orbite de Mars.

Il faut faire une correction d'orbite et agir sur sa grandeur.

Correction d'orbite

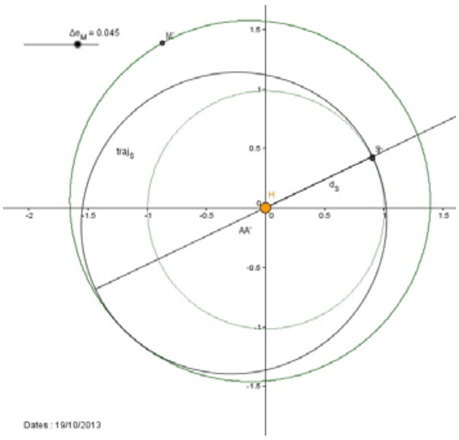
Créer un curseur permettant de faire varier l'ellipse suivie par la sonde.

- curseur Δa_S variant de -0.1 à +0.1, largeur 100, incrément 0.01.



Le changement d'excentricité agira sur la grandeur du demi-grand axe.

a_S = (a_T + a_M) / 2 + Δa_S



On pourra ainsi ajuster l'ellipse de façon qu'elle soit tangente à l'orbite de Mars quelle que soit la date de départ.

On peut donc lancer la fusée, mais avec la date choisie, une trajectoire simplement balistique ne donne pas un rendez-vous possible. Mars est déjà passé.

Pour réaliser cette jonction, il faut jouer sur la date de lancement. Pour que Mars ne soit pas trop en avance, il faut partir plus tard, de façon que la Terre, tournant plus vite, ait rattrapé un peu plus Mars.

On peut donc agir sur la valeur de **Δt0** qui va faire tourner l'ellipse de la trajectoire en fonction de la position de la Terre à la nouvelle date.

Pour faire ceci de façon commode, on va transformer **Δt0** en curseur.

Dans la fenêtre **Algèbre**, cliquer sur le petit point à gauche de **Δt0**. Dans la **fenêtre Graphique**, un curseur se crée. Lui donner pour intervalle, les plages de 0 à 200.

En jouant alternativement sur les trois curseurs (**tps**, **Δt0** et **Δa_S**), on va pourvoir faire coïncider l'arrivée de la sonde avec Mars.

Donner la date de départ et d'arrivée pour la période qui nous intéresse et la durée du voyage.

Réponses : voir en fin de document.

Sauvegarder une dernière fois votre travail.

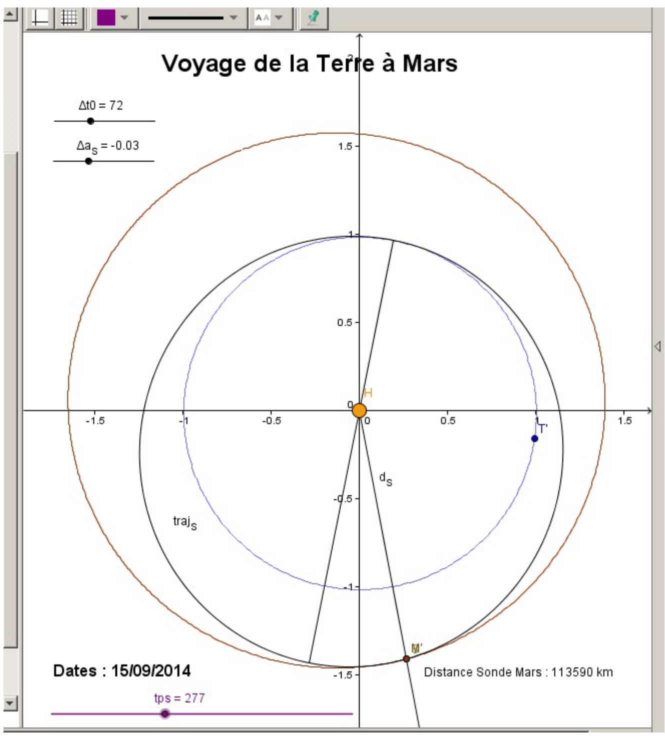
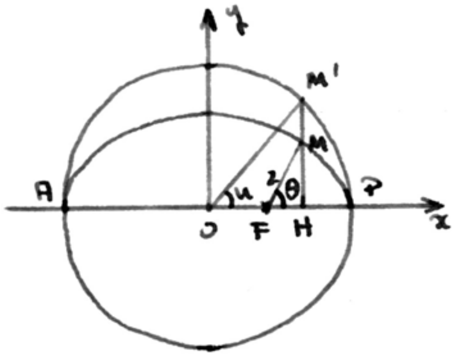


Figure 16 - Graphique Geogebra, résultats.

Mouvement keplérien de la sonde



Dessin du cours de J. Dufay

Voir le TD sur l'équation de Kepler et la loi des aires sous GeoGebra et le cours de Jean Dufay (fichier *crs_dufay_lois_kepler&newton.pdf*).

On peut améliorer le mouvement de la sonde en fonction de **tps** en calculant sa position avec l'équation de Kepler écrite habituellement sous la forme :

u – e sin u = M

u étant l'anomalie excentrique et **M** étant l'anomalie moyenne (voir cours J. Dufay). Soit :

▶ **ams = 2 pi tps / P_S**

Que l'on transforme en :

x – e_S sin (x) = ams
x – ams = e_S sin (x)

En se servant des propriétés de GeoGebra, la solution de cette équation est donnée par l'abscisse du point intersection des deux fonctions :

▶ **f1: = e_S sin(x)**
f2: = x - ams

▶ Intersection : **K = Intersection[f1, f2, -2 pi, 4 pi]**

On obtient l'anomalie excentrique en prenant l'abscisse de **K** (résultat en radians) :

▶ **u = x(K)**

De là on passe à l'anomalie vraie **v** qui est la direction de la sonde par rapport à **H** et au grand axe **AA'** de son ellipse, exprimée en degrés :

▶ **v = 2 arctan(tan(u / 2) sqrt((1 + e_S) / (1 - e_S))) 180 / π**

On trace la demi-droite en direction de la sonde :

▶ **d'_S = DemiDroite[H, (1; (v + lt_0)°)]**

Il reste à placer le point **S'** :

▶ **S' = Intersection[traj_S , d'_S]**

On vérifie qu'au périhélie et à l'aphélie, les deux représentations de la sonde **S** et **S'** coïncident.

Compléments

Vitesse de la sonde

Au départ, la sonde bénéficie de la vitesse de la Terre pour être placée sur son orbite.

1 - Quelle est la vitesse moyenne de la Terre ?

Sur son orbite, la sonde va avoir une vitesse variable, la plus grande au périhélie et la plus petite à l'aphélie (loi des aires de Kepler).

Sa vitesse, en ces points de l'orbite, peut s'exprimer en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité :

vitesse moyenne	$v_m = \frac{2\pi a}{T}(1-e^2)^{-1/2}$
vitesse au périhélie	$v_{Périhélie} = v_m \cdot (1+e)$
vitesse à l'aphélie	$v_{Aphélie} = v_m \cdot (1-e)$

La vitesse étant variable tout au long de la période, la vitesse moyenne n'est pas égale à 360° divisée par la période, mais par la moyenne de l'intégrale de celle-ci sur une période.

2 - Au moyen de GeoGebra calculer ces trois vitesses.

3 - Quelle est la vitesse supplémentaire qu'il faut encore donner à la sonde pour se mettre en orbite ?

Réponses

Dates et durée du voyage

- Départ 12 décembre 2013
- Arrivée 15 septembre 2014

Demi période : 248.8 jours
Durée : 277 jours

Vitesses de la Terre et de la sonde

Vitesse de la Terre	v_T=2*pi*a_T*150000000/(365.25*24*3600)	29.41 km/s
Vitesse moyenne	v_m=2*pi*(a_S*150000000)/(P_S*24*3600)*(1-e_S^2)^(-0.5)	27.54 km/s
Vitesse aphélie	v_{aph}=v_m*(1-e_S)	22.18 km/s
Vitesse périhélie	v_{per}=v_m*(1+e_S)	32.89 km/s
Vitesse à acquérir	Δvit = v_{per}-v_T	3.48 km/s