Simulation de transit planétaire sous Geogebra

(version du 19/2/2013)

Introduction

Les exoplanètes tournent autour de leurs étoiles comme les planètes autour du Soleil sur des orbites que l'on peut considérer comme képlériennes : orbites planes et de forme elliptique.

Les transits planétaires sont observables lorsque l'orbite de la planète est pratiquement dans la ligne de visée de l'observateur. La planète passant régulièrement devant l'étoile en cache alors une partie. Le flux observé de l'étoile va baisser dans la proportion de la surface occultée.

Geogebra permet de simuler un tel transit et tracer la courbe de lumière observée au cours d'une période complète de rotation de l'exoplanète.

Il sera aussi facile de faire varier les différents paramètres d'un système étoiles-planète : période, demi-grands axes, tailles étoiles et planète avec des curseurs et voir leurs influences sur la courbe de lumière.

Le problème sera simplifié en supposant :

– l'orbite circulaire
– l'observateur dans le plan de l'orbite

Philosophie de la construction

L'utilisation d'opérateurs logiques va simplifier grandement l'affichage et les calculs de la planète qui est soit devant, soit derrière, soit en contact...

Ces opérateurs seront mis à vrai (*true*) ou à faux (*false*) suivant la position de la planète sur son orbite et en fonction de leur valeur, on exécutera un calcul ou un autre, on affichera ou on cachera un objet.

La planète tournant au tour de son étoile, le travail consiste donc à bien repérer les différentes positions où les situations changent : devant derrière, dans, en dehors de l'étoile, en transit sur le bord ou en transit sur l'intérieur et de créer les variables logiques (drapeaux ou *flags* en anglais) qui permettent de déceler ses positions, puis à faire les calculs des surfaces des parties obturantes pour tracer la courbe de lumière.

Transits planétaires

Lorsque un objet céleste obscur passe devant au autre objet lumineux, on dit qu'il y a occultation totale ou partielle, et le flux lumineux de l'objet brillant s'en trouve diminué pendant le passage ou "Transit".

Si ceci est spectaculaire avec les "éclipses de Soleil", il n'en est pas de même avec les exoplanètes. Le pourcentage de surface occultée de l'étoile est petit, le phénomène est difficile à observer et demande des appareils très performants.

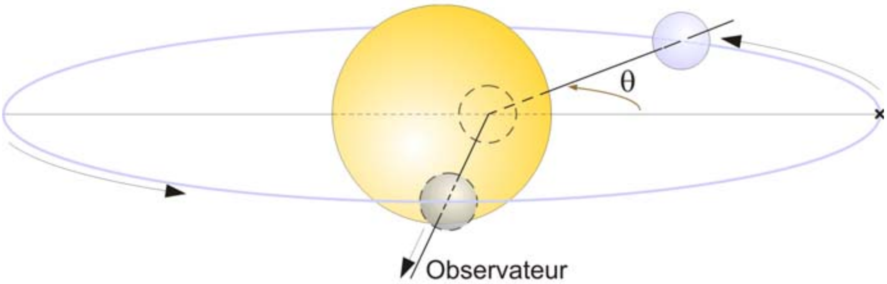

Figure 1

La détection des exoplanètes par la méthode des "transits" est devenue couramment accessible par les instruments actuels d'observation.
Nous allons donc simuler avec les facilités de Geogebra, ces passages avec différents critères d'orbites, de périodes, de rayons des objets.

Pour qu'il y ait transit, il faut que la ligne de visée de l'observateur soit proche du plan de l'orbite de la planète, l'équivalent de l'écliptique pour la Terre, sinon la planète indiscernable passe en dessus ou en dessous de l'étoile comme souvent la Lune à la phase de la Nouvelle Lune.

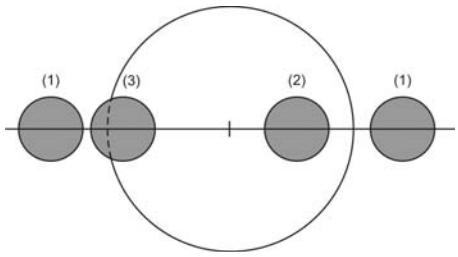

Figure 2

En regardant la géométrie du système (figure 2), quand la planète passe devant l'étoile, deux cas vont se produire :
– l'étoile est entièrement contenue dans le disque stellaire (2), alors le calcul est facile, c'est la différence des surfaces.
– l'étoile est sur le bord (3) et une partie de sa surface seulement obture le disque de l'étoile.
Il faudra donc bien séparer tous ces cas pour les calculs des surfaces occultées et nous nous servirons de "*drapeaux logiques*" ou "*valeurs booléennes*" (*flag* en anglais) pour valider les surfaces à prendre en compte, en fonction des différentes positions pendant la rotation de la planète autour de l'étoile.
Les moments où le disque de la planète est tangent au disque de l'étoile s'appellent les moments des contacts, intérieurs et extérieurs, numérotés de 1 à 4 dans l'ordre de leur succession.

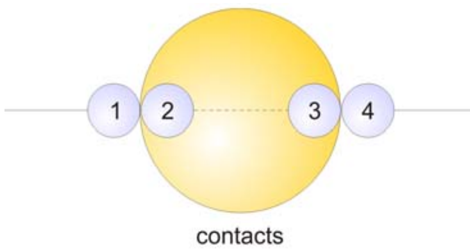

Figure 3

Paramètres

Nous avons un système simple képlérien : une seule planète orbite autour d'une seule étoile et son orbite est circulaire. L'observateur se situe dans le plan de l'orbite.
Les paramètres que l'on utilisera sont, en unités arbitraires et ajustables dans des plages données :

Rayon de l'étoile	R_E	Rayon de l'orbite	a
Rayon de la planète	R_P	Période de rotation	P

et une variable temps *tps* pour faire tourner la planète avec l'angle θ qui repère sa position angulaire :

$$\theta = \frac{2\pi \cdot tps}{P} \text{ radians} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{360 \cdot tps}{P} \text{ degrés}$$

Notation et syntaxe Geogebra : les indices des noms d'objets se créent en utilisant le caractère souligné "_".
On écrit pour un caractère en indice P_1 donnera P_1 et pour plusieurs caractères, on se sert des accolades {} : P_{Soleil} qui donnera P_{Soleil}.

Objets de base du système

Position de l'étoile : au centre
Position de la planète P_P de coordonnées (*a cos(θ),0)* et son abscisse x_P.

Les cas d'occultation

Sur une période complète il faut pouvoir repérer les différentes positions d'occultation, de non occultation ou d'occultation partielle.
On prendra comme origine de l'angle θ, la position de la planète à l'extrême droite, et par convention de rotation dans le sens direct, elle passe d'abord derrière et au retour devant (figure 1 et 4).

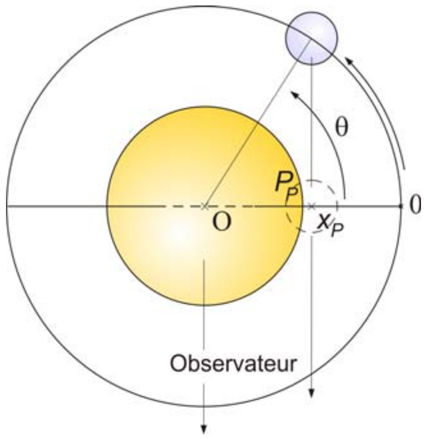

Figure 4 - vue de dessus

Devant derrière : pour savoir si la planète passe devant ou derrière on utilisera la fonction sinus de l'angle θ. En effet de 0 à180°, le sinus est positif, est de 180° à 360°, il est négatif.
On crée donc une variable logique qui sera vraie (true) de 0 à 180° et fausse (false) de 180° à 360°.

θ	0 à 180°	180° à 360°
sin θ	0 ↗ 1↘0	0 ↘ -1 ↗ 0
position planète	derrière	devant
drapeau d_{phase}	false (0)	true (1)

Syntaxe d'écriture : *d_{phase} = Si[sin θ <0 , true , false]*

Cas intérieur, extérieur, transitions

1 – Intérieur-extérieur

Pour les calculs, il faut distinguer les cas, intérieur extérieur. Ce que l'on fera sur le critère de la position du centre du cercle de la planète qui sera soit à l'intérieur du cercle de l'étoile, soit à l'extérieur.
Ce que l'on traduit par : la valeur absolue de l'abscisse de la planète par rapport à l'étoile sera comparée au rayon de l'étoile R_E (figure 5).

La variable logique sera d_{in} et on écrira donc :

$$d_{in} = Si[abs(x_P) < R_E, true , false]$$

2 – Test de entrées-sorties ou d'occultation partielle.

Quand la planète recouvre le bord de l'étoile, on mettra à *vrai* le drapeau d_{ES}, sinon il sera à *faux* :

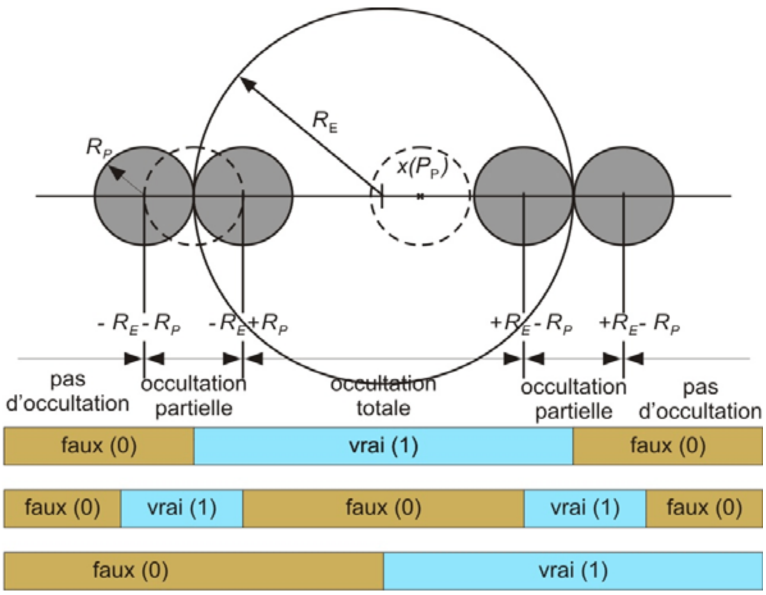

Figure 5 - Les différents positions d'occultation.

$$d_{ES} = Si[(abs(x_P) < (R_E + R_P)) \wedge (abs(x_P) > (R_E - R_P)) ,1,0]$$

Le test d'entrée-sortie peut aussi se faire sur l'existence des intersections des deux cercles R_E et R_P.
On écrira alors :

$$d_{ES} = Si[EstDéfini[Intersection[c\_E , c\_P]], true , false]$$

3 – Test gauche - droite

Pour la géométrie et les calculs, il faut encore savoir si l'on est à droite ou à gauche du centre de l'étoile. Ce que l'on testera avec le drapeau d_{GD}, en choisissant de le mettre à *true* quand la planète est vue à droite.

$$d_{GD} = Si[x_P >0, true , false]$$

Construction du graphique

Ouvrir Geogebra

Les objets écrits en gras et italique sont à créer.

Paramètres variables : construction des curseurs, objets à créer :

	Objet	Plage du curseur	Largeur
Rayon orbite	$\boldsymbol{a}$	0 à 5	200
Rayon étoile	$\boldsymbol{R_E}$	1 à 5	200
Rayon planète	$\boldsymbol{R_P}$	0.1 à 0.5	200
Période	$\boldsymbol{P}$	1 à 6	200
Temps	***tps***	0 à 10	300

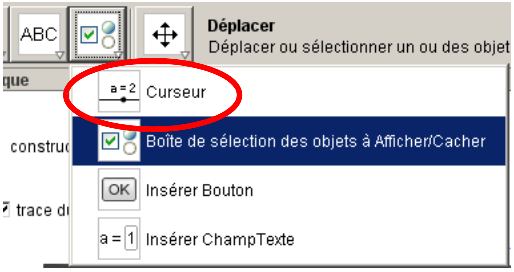

Figure 6 - Geogebra, construction curseur.

On crée les objets :

- la variable position angulaire θ de la planète sur son orbite, l'angle $\boldsymbol{\theta} = 2\ pi * tps / P$ ou $360° * tps / P$
- Le point central $\boldsymbol{O}=(0,0)$ Rappel syntaxe d'un point : (*abscisse*, *ordonnée*)
- Le cercle de l'étoile que l'on peut mettre en couleur et enlever l'affichage de l'étiquette

  $\boldsymbol{c_E} = Cercle[O, R_E]$
- Le point P_P centre du cercle de la planète projeté et le cercle de la planète (à mettre en couleur si l'on veut) et son abscisse :

  $\boldsymbol{P_P} = (a*cos(\theta),0)$ et $\boldsymbol{x_P} = x(P_P)$ ou $\boldsymbol{x_P} = a*cos(\theta)$

  $\boldsymbol{c_P} = cercle[P_P,R_P]$

Les drapeaux logiques

- Drapeau de phase devant derrière $\boldsymbol{d_{phase}} = Si[sin(\theta) < 0, true , false]$
- Drapeau d'intérieur $\boldsymbol{d_{in}} = Si[abs(x_P) < R_E , true , false]$
- Drapeau de gauche droite $\boldsymbol{d_{GD}} = Si[x_P > 0, true, false]$
- Test des entrées – sorties : $\boldsymbol{d_{ES}} = Si[(abs(x_P) < (R_E + R_P)) \wedge (abs(x_P) > (R_E - R_P)) , true,false]$

La trajectoire de la planète vue du dessus

Pour mieux visualiser le système, on trace l'orbite de la planète dans le plan du graphique :

- Cercle de l'orbite mis en pointillé : $\boldsymbol{c_{orb}} = cercle[O,a]$
- Point représentatif : $\boldsymbol{P'} = (a;\theta)$
- Le cercle de rayon R_P, centré sur P' et mis en pointillé :

  $\boldsymbol{c'_P} = cercle[P' , R_P]$

Les intersections d'entrées sorties

Lorsque les deux cercles se coupent, le problème se complique puisqu'il faut calculer la surface commune qui correspond à la surface qui sera occultée.

Puisqu'il y a symétrie par rapport à l'axe des abscisses, nous raisonnerons sur la partie de ordonnées positives. Les résultats seront à doubler pour avoir les surfaces totales.

Soit J le point d'intersection des deux cercles dans la partie des ordonnées positives. Créons d'abord les intersections des deux cercles

- $\boldsymbol{J} = Intersection[c_E , c_P]$ qui crée J_1 et J_2

à cacher et créons le point J à ordonnées positives :

- $\boldsymbol{J} = (x(J_1) , abs(y(J_1)))$

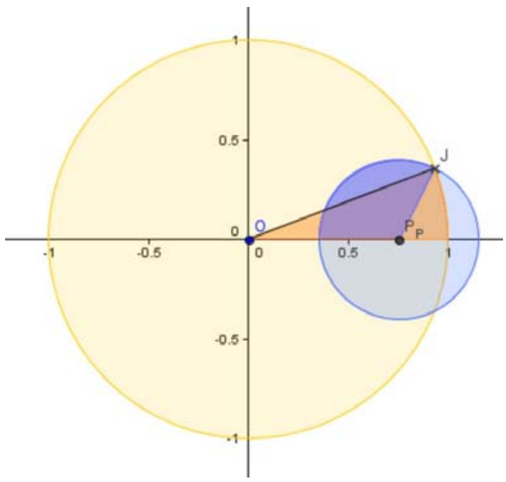

Figure 7 - cercles des objets.

Création des points remarquables d'intersection des cercles avec l'axe des abscisses L et M (figures 8 et 9).

- M est le point du cercle stellaire du même côté que la planète. On se sert du drapeau droite gauche d_{GD}.

  $\boldsymbol{M} = (Si[d_{GD} , R_E , -R_E] , 0)$

‣ L est le point du cercle de la planète à l'intérieur. On se sert du même drapeau droite gauche.

$\mathbf{L} = (x_P + si[d_{GD} , - R_P , R_P] , 0)$

‣ L' est le point du cercle de la planète à l'extérieur. On se sert du même drapeau droite gauche.

$\mathbf{L'} = (x_P + si[d_{droite}, R_P , - R_P],0)$

Changeons le style de J, L, L' et M en les mettant sous forme de croix.
Et l'on obtient les schémas ci-dessous suivant que le centre P_P de ce cercle c_P est intérieur ou extérieur au cercle étoile c_E . Il y a symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figures 8 et 9) :

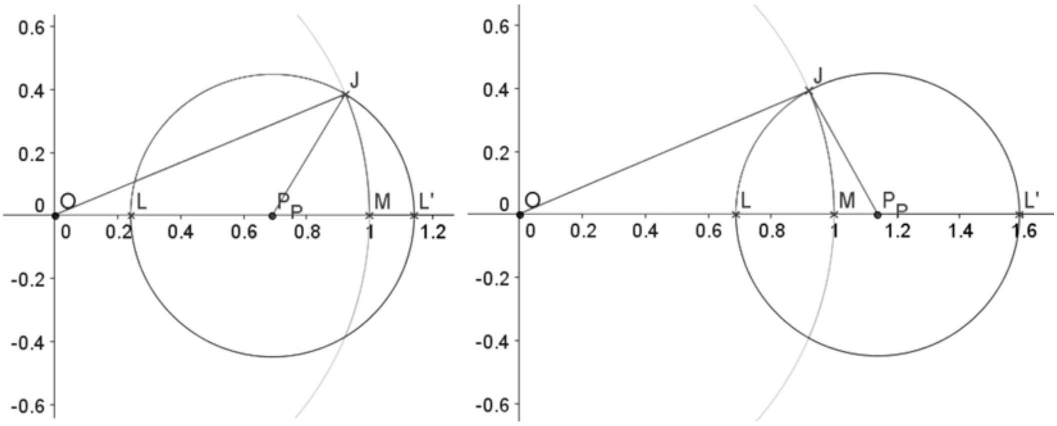

Figure 8 - Les cas d'intersections côté droit.

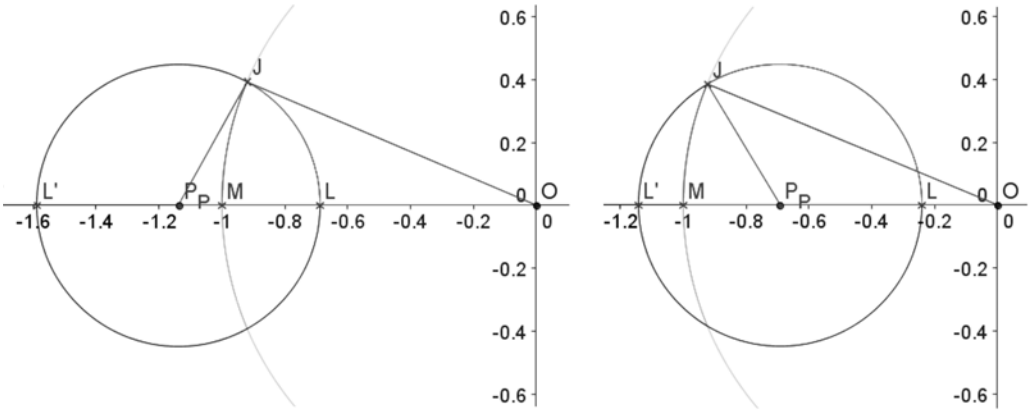

Figure 9 - Les cas d'intersections côté gauche.

La surface obturante est le demi-cercle de la planète moins la demi-lunule $ML'J$.
La surface de la lunule se calcule par les secteurs circulaires OMJ et P_PLJ et le triangle OJM.
Au tracé des secteurs, un problème émerge, car Geogebra trace des secteurs circulaires orientés.
Si à droite, on crée le secteur circulaire OMJ, nous aurons bien le secteur que nous voulons, mais à gauche, ce sera tout le reste du cercle qui sera rempli.
Pour contourner cette difficulté, nous créons les secteurs circulaires définis par la condition donnée par le drapeau d_{GD}.

‣ $\mathbf{sct_E} = SecteurCirculaire[O , Si[d_{GD} , M , J] , Si[d_{GD} , J , M]]$ (secteur OMJ ou OJM)

‣ $\mathbf{sct_P} = SecteurCirculaire[P_P , Si[d_{GD} , J ,L] , Si[d_{GD} , L , J]]$ (secteur P_PJL ou P_PLJM)

Il reste à construire le triangle OP_PJ pour la facilité des calculs de surface :

‣ $\mathbf{stri} = Polygone[P_P , J , O]$

Calcul des surfaces obturantes

La surface obturante peut se calculer par l'addition et soustraction de surface de secteurs circulaires et d'un triangle :

1 – Cas centre P_P à l'intérieur du disque de l'étoile (figure 10):

Aire obturante = secteur P_PJL + surfaceP_PMJ
surface P_PMJ = secteur OMJ – triangle OP_PJ
Aire obturante = secteur P_PJL
+secteur OMJ – triangle OP_PJ

Traduit en Geogebra de notre graphique et en tenant compte de la partie basse:

$sobt = 2\ (sct\_P+sct_E - stri)$ (*st*ri surface du traingle *OMJ*)

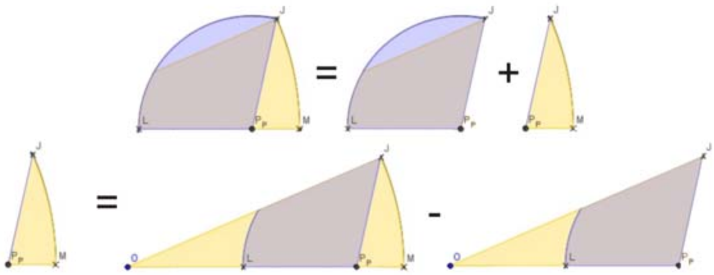

Figure 10 - centre planète à l'intérieur.

2 – Cas centre P_P à l'extérieur du disque de l'étoile (figure 11):

Ce qui donne en Geogebra la même relation:

sobt $= 2\ (sct_P + sct_E - stri)$

Il faudra aussi penser à la phase (devant – derrière) et utiliser le drapeau d_{phase}.

Surface restante : surface de l'étoile – surface obturée.

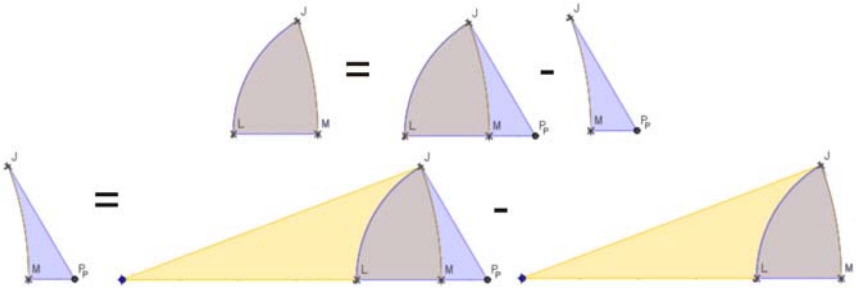

Figure 11 - centre planète à l'extérieur.

Suivant la position de la planète résumons les différents cas d'obturation durant le passage devant :

<table>
<tr><td>Position</td><td></td><td>1 (*)</td><td>2 (*)</td><td>Centre</td><td>3 (*)</td><td>4 (*)</td><td></td></tr>
<tr><td>x_P : pos. P_P</td><td>à gauche</td><td>$-(R_E + R_P)$</td><td>$-(R_E - R_P)$</td><td>0</td><td>$(R_E - R_P)$</td><td>$(R_E + R_P)$</td><td>à droite</td></tr>
<tr><td>d_{ES}</td><td>faux</td><td>vrai</td><td>faux</td><td>faux</td><td>vrai</td><td>faux</td></tr>
<tr><td>d_{in}</td><td>faux</td><td>faux</td><td>vrai</td><td>vrai</td><td>faux</td><td>faux</td></tr>
<tr><td>Obturation</td><td>0</td><td>partielle</td><td>complet</td><td>complet</td><td>partielle</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Résultat</td><td>πR_E^2</td><td>$\pi R_E^2 - scach$</td><td colspan="2">$\pi (R_E^2 - R_P^2)$</td><td>$\pi R_E^2 - scach$</td><td>πR_E^2</td></tr>
</table>

(*) Les numéro 1, 2, 3, 4 renvoient aux positions des contacts (figure 3)

La surface cachée *scach* peut alors s'écrire avec un **double SI** :

Condition entrée sortie	Vrai	Faux	Condition intérieure	Vrai	Faux
scach = *Si [* d_{ES} ,	*sobt ,*	*Si[*	d_{in} ,	$pi * R_P^2$,	*0]]*

Il reste à appliquer le drapeau devant-derrière. Il suffira de multiplier la surface cachée par 0 si la planète est derrière et par 1 si elle est devant :

$$scach * Si[d_{phase} , 1 , 0]$$

Et la surface restante vue s'écrit :

$$\mathbf{s_{vue}} = \pi R_E^2 - scach\ Si[d_{phase} , 1, 0]$$

Tracé de l'intensité sur une période complète

On crée le point T d'abscisse x_P et d'ordonnée s_{vue}.
Pour ne pas mélanger les tracés, on normalise à 3 hors transit :

$$\mathbf{T} = (x_P ,3*s_{vue} / (pi * R_E^2))$$

Changer le style du point en "▸""et lui donner un peu de couleur.

Visualisation de la trace

On peut suivre sa trace en validant la case *Afficher la trace dans les Propriétés/Basique*
ou avec le bouton droit sur le petit point à la gauche de *T* dans la fenêtre algèbre.
Mais ceci laisse une large trace de la largeur du symbole du point.

● Astuce :
On crée *T'* un sosie de *T*, de dimension minimale et une boîte de sélection qui validera ou non sa visibilité :
– créér un point ***T'***. On active sa trace et l'on n'affichera pas son étiquette (figue 12) et on lui donne une taille minimale (*onglet style*).

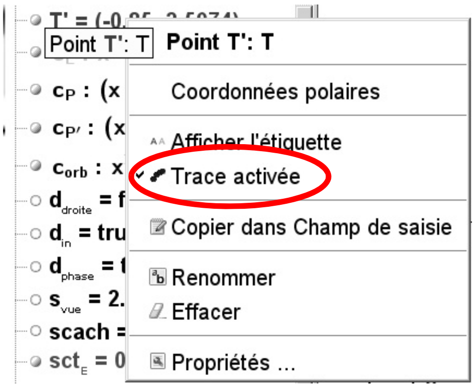

Figure 12 - état point *T'*.

– créer une valeur logique mise à true (vrai) :

Trace = *true*

– dans la fenêtre *Algèbre* cliquez sur le petit rond vide (figue 13) à droite de *T'*, il va se remplir et un bouton logique apparaît dans la fenêtre graphique.

Si le bouton est coché, *Trace* est à *true*, non coché à *false*.

Dans l'onglet *Avancé* des *Propriétés*, inscrire *Trace* comme *Condition pour afficher l'obj*et (figure 14).

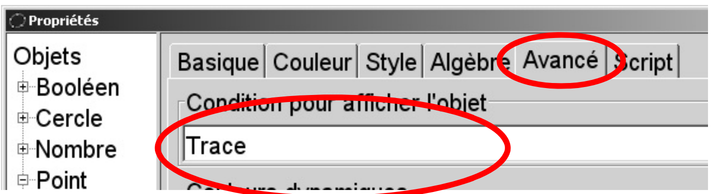

Figure 14 - affichage du point *T'* par le bouton *Trace*.

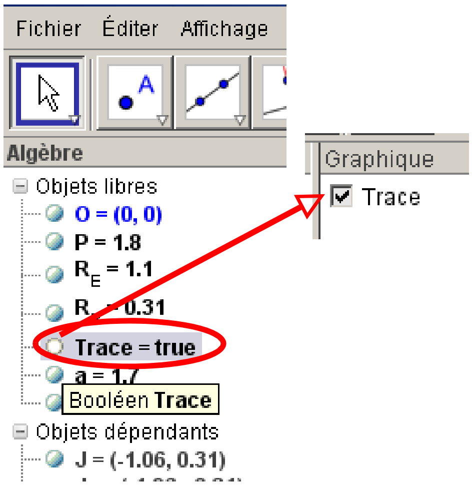

Figure 13 - création d'un bouton logique

On pourrait aussi afficher ou non la trace par un *Bouton*

Animation

Mettre un pas d'animation de *tps* pas trop grand, plus petit ou égal à 0.1 et mettre *Répétition* la valeur *Croissant*.
Le bouton d'animation étant validé, l'ensemble se met en mouvement :

– la planète sur son orbite
– la projection sur l'axe des abscisses
– les différents secteurs quand ils sont définis

On peut alors changer les paramètres pour voir l'incidence sur les variations de la courbe de lumière.

Pour rafraîchir la vision de la page, commande *Affichage/Rafraîchir l'image*.

Un plus de visualisation : lorsque la planète est derrière, on peut éviter de visualiser les secteurs et le triangle.
Il suffit sur ces objets de mettre la condition de visualisation d_{phase} à tous les objets dessinés :
les secteurs, le triangle et aussi aux côtés du triangle créés par Geogebra : segments p_p, j et o.

On peut encore raffiner et mettre une boîte de dialogue qui permet de visualiser seulement quand on veut, les points et figures des constructions.