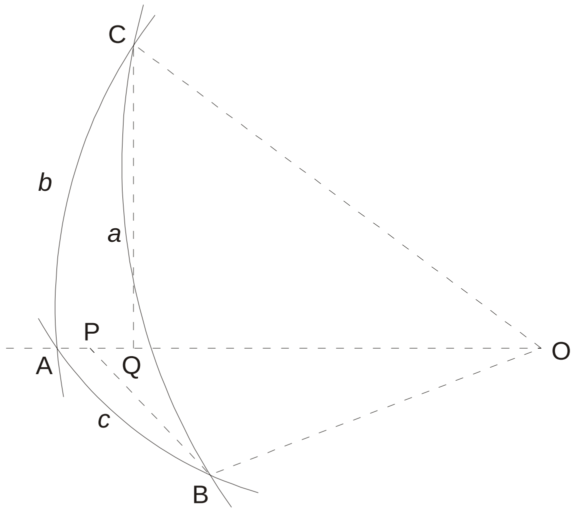
Trigonométrie sphérique

La formule fondamentale de la *trigonométrie sphérique* traduit la relation qu'il existe entre un angle du triangle et les trois côtés. Prenons une sphère de rayon égal à l'unité.

Soit le triangle sphérique ABC; joignons les trois sommets au centre O de la sphère et projetons orthogonalement les sommets B et C en P et Q sur OA. Les vecteurs OB, OC, tous deux égaux à l'unité, sont respectivement les sommes géométriques des vecteurs OP, PB d'une part, OQ, QC d'autre part. De plus, les vecteurs OP et QC sont rectangulaires, ainsi que les vecteurs OQ et PB; leurs produits géométriques sont donc nuls et, par suite, le produit géométrique des deux vecteurs OB et OC est égal à la somme des produits géométriques des vecteurs OP, OQ d'une part, PB, QC d'autre part. En désignant par a, *b, c* les côtés et par A, B, C les angles du triangle sphérique, on a :



$$OQ = \cos b,\ QC = \sin b,\ OP = \cos c,\ PB = \sin c,$$

en sorte, que l'on a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

car l'angle des directions positives des deux vecteurs PB et QC est précisément égal à l'angle A.

En faisant une permutation circulaire sur les éléments *a, b, c*, A, B, C, on a le groupe :

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned} \tag{1}$$

La considération du triangle polaire permet d'écrire immédiatement le système

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b\\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.\end{aligned} \tag{2}$$

En éliminant successivement les angles *a*, A puis *b*, B enfin *c*, C entre les équations (1) on établit encore le système :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{3}$$

Enfin, si on pose $a + b + c = 2p$ et si on désigne par ε l'excès sphérique A + B + C - π, on a la formule

$$\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2}\cdot\tan\frac{p-a}{2}\cdot\tan\frac{p-b}{2}\cdot\tan\frac{p-c}{2}}$$

qui sert à calculer la surface d'un triangle sphérique.