tiere vaut deux fois ce quarré, ou le rectangle *ADFE*.

2°. Un point quelconque *P* étant donné sur le rayon *CA*, on peut toujours trouver un autre point *Q* tel que l'espace *MHLN* borné par les droites *MH*, *LN* tirées des points *P*, *Q*, perpendiculairement sur *AC*, & par les deux arcs *MN*, *HL*, sera quarrable absolument. Car si l'on décrit du centre *H* & de l'intervalle *HG* égal au rayon *CA*, un arc de cercle qui coupe *CR* en *G*, & que du point *G* comme centre, on décrive de ce même intervalle un autre arc de cercle *HL* qui coupe le quart de cercle *BA* en un autre point *L*, par lequel on mene parallelement à *BR* la droite *LN* qui coupe en *Q* le rayon *CA*: l'espace moyen *MHLN* de la Lunule, sera précisément égal au trapese rectiligne *MHLN*, borné par les mêmes paralleles *MH*, *LN*, & par les cordes *MN*, *HL* des deux arcs de cercles. La démonstration est si facile, que je ne m'y arrête pas. J'avertirai seulement que la partie *AP* doit être moindre ou plus grande que la moitié du rayon *CA*; car si elle lui étoit égale, l'espace *MHLN* deviendroit nul, parce que le cercle qui a pour centre le point *G*, toucheroit alors le quart de cercle *BA*.

AUTRE REGLE GENERALE

DES FORCES CENTRALES.

Avec une maniere d'en déduire & d'en trouver une infinité d'autres à la fois, dépendemment & indépendemment des Rayons osculateurs qu'on va trouver aussi d'une maniere infiniment generale.

PAR M. VARIGNON.

1701. 29. Janvier. OUtre les Regles des Forces centrales que je donnai l'année passée à l'Académie, en voici encore une plus generale, & qui se peut démontrer en plusieurs manieres toutes très-simples : Voici comment, & avec un Exemple seulement pour en faire voir l'usage, lequel exemple sera suivi de quelques Remarques qui contiendront le reste.

I. Soit donc une Courbe quelconque QLM, dont les forces centrales tendent toutes au point fixe C. Soit AL le rayon de sa Développée au point L, & LH une touchante en ce même point. Ensuite après avoir pris Ll indéfiniment petite, soient des centres C & L les arcs de cercles lR & lE; soit de plus RP perpendiculaire sur Ll. FIG. 3.

Quant aux noms, soient aussi $AL = n$, $LR = dx$, $Rl = dz$, $Ll = ds$, $y =$ force centrale en L vers C, & $dt =$ l'instant que le corps à qui elle fait décrire la Courbe QLM, met à parcourir l'élement Ll de cette Courbe.

II. Cela posé, les triangles semblables ALl & LlE donneront $AL(n).\ Ll(ds) :: Ll(ds).\ lE = \frac{ds^2}{n}$. De même les triangles semblables LlR & LRP donneront aussi $Ll\ (ds).\ Rl\ (dz) :: LR.\ RP :: y$ (force suivant LC). $\frac{ydz}{ds}$ (force suivant PR). Or à cause de PR & de El toutes deux (*hyp.*) perpendiculaires sur Ll, l'espace $El \left(\frac{ds^2}{n}\right)$ est ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{ydz}{ds}\right)$ pendant l'instant dt par le corps qui décrit l'arc élémentaire Ll, au lieu de suivre la tangente LH, comme il auroit fait sans cette force ou sans y. Donc cette force instantanée lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, & d'ailleurs étant constant que des espaces ainsi parcourus en vertu de forces uniformes & toujours appliquées, (ainsi qu'on le pense d'ordinaire de la pesanteur,) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non interrompue; l'on aura $\frac{ds^2}{n} = \frac{ydz}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ pour la Regle cherchée.

III. *Autrement.* Soit de plus lD parallele à LC: il en résultera encore un triangle DlE semblable à LRP, qui l'est à LlR; ce qui donnera $Rl\,(dz).\ LR\,(dx) :: lE\,\left(\frac{ds^2}{n}\right).\ DE = \frac{dx\,ds^2}{n\,dz}$. De plus on aura auſſi $Ll\,(ds).\ LR\,(dx) :: LR.\ LP :: y$ (force ſuivant LC). $\frac{y\,dx}{ds}$ (force ſuivant LP). Donc on aura encore comme ci-deſſus (art. 2.) $\frac{dx\,ds^2}{n\,dz} = \frac{y\,dx}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$: c'eſt-à-dire, encore la même Regle que dans l'article précédent.

IV. *Autrement encore.* Les triangles ſemblables DlE, LRP, & LlR, donneront auſſi $Rl\,(dz).\ Ll\,(ds) :: RP.\ LR :: lE\,\left(\frac{ds^2}{n}\right).\ lD = \frac{ds^3}{n\,dz}$. Donc on aura encore comme ci-deſſus (art. 2.) $\frac{ds^3}{n\,dz} = y\,dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$: c'eſt-à-dire la même Regle encore que dans les deux derniers articles précédens.

V. *Corol.* J'ai fait voir dans le Memoire donné à l'Académie, le 13. Novembre dernier, qu'afin qu'un corps ſe meuve uniformément ſur une Courbe quelconque, il faut que les directions des forces centrales requiſes pour la décrire, ſoient toutes perpendiculaires à cette Courbe. Et par conſéquent alors, outre $dt = ds$, l'on aura auſſi $dz = ds$; ce qui changera la Regle précédente en $y = \frac{ds^3}{n\,ds^3} = \frac{1}{n}$. D'où l'on voit qu'en ce cas les forces centrales ſeroient toujours en raiſon réciproque des rayons de la Développée de cette Courbe, ainſi qu'on le voit auſſi démontré dans ce même Memoire du 13. Novembre dernier, Probl. 7.

VI. *Exemple.* Pour appliquer la Regle précédente (*art.* 2. 3. 4.) à quelque exemple, ſoit l'Ellipſe ordinaire ALB, dont le grand axe ſoit AB, & au foyer C de laquelle tendent les forces centrales (y) neceſſaires, par exemple, à quelque Planete pour la décrire dans l'hypotheſe de Kepler, qui fait les tems (t) comme les aires ACL, c'eſt-à-dire (en ſuppoſant $CL = r$) $dt = r\,dz$.

FIG. 4.

En faiſant dz conſtante, l'*Analyſe des infiniment petits*, art. 78. donne ici le rayon (n) de la Developpée, $= \frac{rds^3}{dzds^2 - rdzddr}$ (soit du centre C l'arc LH, & $AH = x$) $= \frac{rds^3}{dzds^2 + rdzddx}$. Or (*art.* 2. 3. 4.) la force centrale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Donc aussi $y = \frac{ds^2 + rddx}{rdt^2}$ (à cause $dt = rdz$) $= \frac{ds^2 + rddx}{r^3dz^2} = \frac{ds^2}{r^3dz^2} + \frac{ddx}{rrdz^2}$. Or (si outre $AB = a$, on fait encore la distance des foyers $DC = c$, $bb = aa - cc$, & dz constante) l'équation $bdr = dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}$ au foyer C de l'Ellipse ALB, donnera ddr ou $-ddx = \frac{2adrdz - 4rdrdz}{b\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$ (à cause de $dr = \frac{dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}}{b}$) $= \frac{2adz^2 - 4rdz^2}{bb}$. Donc $y = \frac{ds^2}{r^3dz^2} - \frac{2a + ar}{bbrr} = \frac{dx^2 + dz^2}{r^3dz^2} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{dx^2}{r^3dz^2} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr}$ (à cause de $dx^2 = dr^2 = \frac{4ardz^2 - 4rrdz^2 - bbdz^2}{bb}$) $= \frac{4ar - 4rr - bb}{r^3bb} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{2ar}{bbr^3} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{rr} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{CL^2}$: c'est-à-dire, les forces centrales tendantes ici en C, en raison réciproque des quarrés des rayons CL; ainsi que nous l'avons déja trouvé (*le* 13. *Nov. de* 1700.) par l'autre Regle, & que Messieurs Newton & Leibnitz, l'ont aussi trouvé chacun à sa maniere.

VII. Il est à remarquer que si j'eusse appellé seulement LR, dr, sans me mettre en peine du nom de AH, ce dernier calcul auroit été un peu plus court; mais l'affinité de ce Memoire avec celui du 13. Novembre de 1700. m'a porté à y parler le même langage.

Par exemple, si sans se mettre en peine de x ni de dx, l'on fait $CL = r$; $LR = dr$, & le reste comme ci-dessus; l'art. 78. de l'*Analyse des infiniment petits*, donnant $n = \frac{rds^3}{dzds^2 - rdzddr}$ en faisant dz constante, & Kepler voulant $dt = rdz$; l'on aura dans son hypothese y $\left(\frac{ds^3}{ndzdt^2}\right) = \frac{ds^2 - rddr}{r^3dz^2} = \frac{dr^2 + dz^2 - rddr}{r^3dz^2} = \frac{dr^2}{r^3dz^2} + \frac{1}{r^3} - \frac{ddr}{rrdz^2}$

(à cause que $dr = \frac{dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}}{b}$ eſt l'équation au foyer C de l'Ellipſe ALB, laquelle en faiſant dz conſtante, donne auſſi $ddr = \frac{2adrdz - 4rdrdz}{b\sqrt{4ar - 4rr - bb}} = \frac{2adz^2 - 4rdz^2}{bb}$) $= \frac{4ar - 4rr - bb}{r^3bb} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{rrbb} = \frac{2ar}{bbr^3} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{rr} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{\overline{CL}^2}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

FIG. 3. VIII. *Schol.* Toutes choſes demeurant les mêmes, ſi préſentement on ſuppoſe $LD = QL$ ſur QL prolongée vers H, c'eſt-à-dire, l'eſpace $QCL = LCD = LCl$, ou $LCl\left(\frac{rdz}{2}\right)$ conſtant; l'on aura $DE = dds$. Ainſi la reſſemblance des Triangles DEl, LPR, LRl, donnera $LR\ (dx)$. $Rl\ (dz)$ :: $DE\ (dds)$. $El = \frac{dzdds}{dx}$. Mais d'un autre côté $AL\ (n)$. $Ll\ (ds)$ :: $Ll\ (ds)$. $El = \frac{ds^2}{n}$. Donc $\frac{dzdds}{dx} = \frac{ds^2}{n}$, ou $n\,(AL) = \frac{dxds^2}{dzdds}$. Ce qui eſt déja une nouvelle maniere de trouver les rayons des Développées, dans laquelle rdz (*hyp.*) conſtant donnera $ddz = -\frac{drdz}{r} = \frac{dxdz}{r}$.

De plus, puiſque cette hypotheſe de rdz conſtant, donne $n = \frac{dxds^2}{dzdds}$, ſi l'on ſubſtitue cette valeur de n dans la formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ des forces centrales trouvée ci-deſſus art. 2. 3. & 4. l'on aura auſſi $y = \frac{ds^3}{dzdt^2} \times \frac{dzdds}{dxds^2} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$, qui eſt la premiere que j'ai donnée dans les Mémoires de 1700. laquelle, comme l'on voit, ſe trouve auſſi fixée à cette hypotheſe de rdz conſtant, au lieu que la Regle précédente $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ ne ſuppoſant rien de tel, ſe trouve diverſifiable en autant d'autres, qu'il y a d'expreſſions poſſibles des Rayons des Développées: c'eſt-à-dire, en une infinité d'autres Regles des forces centrales, vû celles qu'on va voir de ces ſortes de Rayons, que j'appellerai

pellerai aussi dans la suite, *Rayons osculateurs.*

APPLICATION

De la précédente formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ *des forces centrales à l'hypothese des tems en raison des aires centrales des Courbes décrites en vertu de ces forces ; desquelles forces la précédente expression generale fournit les deux particulieres à cette hypothese de Kepler, que M. (Jean) Bernoulli, M. de Moivre, & M. Keil, ont trouvées par d'autres voies depuis la premiere édition de ces Mémoires.*

IX. Si l'on mene $CB = p$, perpendiculaire en B sur la tangente LH, la présente hypothese de Kepler changera la précédente formule generale des forces centrales $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ en $y = \frac{LC}{A\,L \times \overline{CB}^3}$ particuliere à cette hypothese : ce qui est la formule qui se voit de M. (Jean) Bernoulli dans les Mem. de 1710. pag. 530. M. Keil dans le Journal Litteraire de 1716. tom. 8. part. 2. art. 22. dit que cette derniere formule a aussi été trouvée par M. de Moivre. Pour la déduire de la précédente generale, il n'y a qu'à considerer que les triangles LBC, LRl, ici semblables, y donnent $CB(p).\ CL(x) :: Rl(dz).\ Ll(ds) = \frac{xdz}{p}$. De plus l'aire centrale $LCl = \frac{1}{2} CB \times Ll = \frac{1}{2} pds$. De sorte que si l'on prend ici les instans dt en raison de ces aires élémentaires, ou de leurs doubles, comme a fait M. Bernoulli ; l'on y aura aussi $dt = pds$, & $dt^2 = ppds^2$: ce qui donnera $ds^2 = \frac{dt^2}{pp}$. Donc ayant ici déja $ds = \frac{xdz}{p}$, l'on y aura $ds^3 = \frac{xdzdt^2}{p^3}$; laquelle valeur de ds^3, substituée en sa place dans la formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ donnera pour ici les forces centrales $y = \frac{xdzdt^2}{p^3\,ndzdt^2} = \frac{x}{np^3} = \frac{LC}{A\,L \times \overline{CB}^3}$ en grandeurs toutes finies. *Ce qu'il falloit* 1°. *trouver.*

FIG. 3.

X. Si outre CB perpendiculaire en B ſur la tangente LH au point L, l'on mene auſſi une tangente lh au point l infiniment prêt de L, laquelle rencontre CB en b; la préſente hypotheſe de Kepler, changera ici la même formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ des précédens art. 2. 3. 4. en $y = \frac{Bb}{\overline{CB}^3 \times LR}$ particuliere à cette hypotheſe, & qui ſe trouve de M. Keil dans le num. 340. des Tranſactions philoſophiques des mois de Juillet, Août, & Septembre de 1714. imprimées en 1715. Pour la déduire auſſi de la generale précédente il n'y a non plus qu'à conſiderer que l'élément Ll de la Courbe, pouvant ici être regardé comme en ligne droite avec la tangente lh; & lE comme parallele à CB: alors outre les triangles ſemblables LAl, ELl; LRl, LBC, l'on aura auſſi les triangles ELl, BLb, ſemblables entr'eux; & en conſéquence LAl, BLb, pareillement ſemblables entr'eux. Donc $Rl\,(dz)$. $LR\,(dx) :: CB\,(p)$. $LB = \frac{pdx}{dz}$. Et $AL\,(n)$. $Ll\,(ds) :: LB\left(\frac{pdx}{dz}\right)$. $Bb\,(dp) = \frac{pdxds}{ndz}$. Ce qui donne $ndz = \frac{pdxds}{Bb}$: de ſorte que la préſente hypotheſe de Kepler, venant (*art.* 9.) de donner $dt^2 = ppds^2$; l'on aura ici $ndzdt^2 = \frac{p^3dxds^3}{Bb}$. Par conſequent en ſubſtituant cette valeur de $ndzdt^2$ en ſa place dans la formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ des art. 2. 3. 4. elle donnera préſentement, pour cette hypotheſe de Kepler, les forces centrales $y = \frac{Bb \times ds^3}{p^3dxds^3} = \frac{Bb}{p^3dx} = \frac{Bb}{\overline{CB}^3 \times LR}$. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

XI. Dans la premiere Edition de ces Memoires, en penſant à la préſente hypotheſe de Kepler, je me contentai de la formule $y = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ des forces centrales (y) de cette hypotheſe, pour laquelle je la déduiſis dans l'article 8. de la formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ des art. 2. 3. 4.

j'en aurois auſſi pû déduire fort aiſément celle $y = \frac{Dl}{CL \times Rl^2}$ qui ſe voit de M. Newton pour la même hypotheſe, dans ſes Princ. Math. Liv. 1. Prop. 6. laquelle eſt la ſeule que je connuſſe alors. En effet cette hypotheſe de Kepler, que M. Newton a ſuivie, donnant $dt^2 = \overline{CL \times Rl^2}$, & l'article 4. donnant $\frac{ds^3}{ndz} = Dl$; la précédente formule generale $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$ donne auſſi la particuliere $y = \frac{Dl}{CL \times Rl^2}$, des forces centrales ($y$) de la même hypotheſe de Kepler, ainſi que je le viens de dire.

REMARQUE I.

Maniere infiniment generale de déterminer les Rayons des Dévéloppées.

XII. Entre pluſieurs moyens que j'ai pour trouver tout ce qu'on a donné juſqu'ici d'expreſſions des Rayons oſculateurs, en voici un qui outre ces expreſſions, quelques generales qu'elles ſoient, peut en fournir encore une infinité d'autres tout auſſi generales, même dans une ſeule, laquelle ſe diverſifiera en toutes celles-là, ſelon la variété infinie de tout ce qu'on y pourra ſuppoſer de conſtant, & qui pour cela ſe peut appeller *infiniment generale*.

Mais afin d'y pouvoir plus aiſément reconnoître tout ce qu'on en a donné juſqu'ici, je ſubſtituerai dans la ſuite les noms qu'on y employe d'ordinaire, à la place de ceux dont je me ſuis ſervi dans les art. 6. 7. c'eſt-à-dire, y & dx à la place de r & de dz, en conſervant ſeulement ds, & en omettant tout à fait ce qui s'appelloit x; Et ce d'autant plus à propos que ces noms y, dx, ds, entrent (dis-je) d'ordinaire dans l'expreſſion des Courbes en queſtion.

Pour cela, ſoit une Courbe quelconque $DABC$ dont les Ordonnées concourent en E, d'où partent trois d'entre FIG. 5.

elles EA, EB, EC, indéfiniment proches les unes des autres, de maniere que le petit côté AB prolongé faſſe la tangente BR, laquelle ſoit rencontrée par l'Ordonnée EC prolongée en S. Soit de plus l'angle $SBP = SEB$; l'arc CM décrit du centre B, lequel rencontre la droite BP en N, laquelle BP ſoit auſſi rencontrée en L par KL parallele à SE. Soient enfin BV & CV deux rayons de la Developpée de la Courbe en queſtion, du centre E les arcs AG & BH, dont le premier rencontre BE en G; le ſecond, SE & LK en H & en K.

Cela fait, ſoient donc appellées AE ou BE ou CE, y; AG ou BH, dx; AB ou BC, ds; & BV ou CV, n.

XIII. Tout cela (dis-je) ſuppoſé, les angles ABE & BPE étant externes par rapport aux triangles EBS & BPS, l'on aura l'angle $ABE = BES + BSE$ (*art.* 12.) $= PBS + BSE = BPE$. Donc les angles en G & en H étant droits, les triangles ABG & BPH ſeront ſemblables entr'eux; Et par conſéquent (*art.* 12.) les triangles ABG & BLK le ſeront auſſi: de ſorte que ſi l'on ſuppoſe de plus $BK = AG$, ces deux derniers triangles ſeront non ſeulement ſemblables mais encore égaux en tout. Donc $AB\,(ds) = BL = BC\,(ds) + NL$: Et par conſequent $NL = -dds$ négatif, les ds allant ainſi en diminuant pendant que les dx (BH) vont en croiſſant; Ce qui donnera au contraire $HK = ddx$ poſitif. D'où l'on aura auſſi $BH\,(dx).\ BP\,(ds) :: KH\,(ddx).\ LP = \frac{ds\,ddx}{dx}$. Donc $NP\,(NL + LP) = -dds + \frac{ds\,ddx}{dx} = \frac{ds\,ddx - dx\,dds}{dx}$.

Mais la reſſemblance (*art.* 12.) des triangles PNC & PHB, donne PH ou $CH\,(dy).\ BH\,(dx) :: PN\,\left(\frac{ds\,ddx - dx\,dds}{dx}\right).\ NC = \frac{ds\,ddx - dx\,dds}{dy}$. De même la reſſemblance (*art.* 12.) des triangles BEH & MBN, donnera $BE\,(y).\ BH\,(dx) :: BM\,(ds).\ MN = \frac{dx\,ds}{y}$. Donc $MC\,(MN + NC) = \frac{dx\,ds}{y} + \frac{ds\,ddx - dx\,dds}{dy} =$

$$= \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy}.$$

Or (*art.* 12.) les deux rayons BV & CV de la Developpée de la Courbe $DABC$, & l'arc MC décrit du centre B, rendant aussi les triangles BVC & MBC semblables entr'eux, l'on aura de plus $MC\left(\frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy}\right) BC(ds) :: BC(ds). CV(n) = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}.$ Laquelle expression des Rayons osculateurs ne suppose encore rien de constant; ce qui la doit rendre infiniment generale, en ce que susceptible qu'elle est de tout ce qu'on peut imaginer de constant dans les autres, elle les doit comprendre toutes à l'infini, quelques generales qu'elles soient chacune en particulier.

Et si l'on y introduit alternativement les valeurs de ddx & de dds, qui résultent en general de $dsdds = dxddx + dyddy$, la substitution de la premiere de ces valeurs changera cette formule en $CV(n) = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$. De même en substituant la valeur generale de dds, cette premiere formule se changera aussi en $CV(n) = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$. De sorte que ces trois formules qu'on voit revenir à la même, seront toutes également & infiniment generales; Aussi ne les doit-on préférer l'une à l'autre dans la pratique, que selon la commodité du calcul.

Formules infiniment generales des Rayons des Développées.

1°. $CV(n) = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}.$

2°. $CV(n) = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}.$

3°. $CV(n) = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}.$

XIV. Pour voir présentement quelques-uns des changemens qui peuvent arriver à ces Formules selon ce qu'on leur supposera de constant :

1°. Soit dx constante, c'est-à-dire par tout $BH = AG$ (*art.* 13.) $= BK$: alors ayant HK ou $ddx = 0$, la premiere des trois formules précédentes se changera en $CV\ (n) = \frac{ydyds^2}{dxdyds - ydxdds}$; Et la troisiéme, en $CV\ (n) = \frac{yds^3}{dxds^2 - ydxddy}$, laquelle est la même que celle qu'on vient d'emprunter (*art.* 6.) de l'*Anal. des infin. petits*, *art.* 78. dans laquelle on appelloit r, dz, ce qu'on appelle ici y, dx.

2°. Si l'on fait dy constante, c'est-à-dire, par tout BG ou (*art.* 13.) $LK = CH$; ayant aussi alors TL ou $ddy = 0$, en faisant CT parallele à HK, la seconde des formules generales de l'article 13. se changera ici en $CV\ (n) = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds}$; Et la troisiéme, en $CV\ (n) = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx}$.

3°. De même si l'on fait ds constante, c'est-à-dire, par tout AB ou (*art.* 13.) $BL = BC$, ayant alors LN ou $dds = 0$, la premiere des formules generales de l'art. 13. se changera ici en $CV\ (n) = \frac{ydyds}{dxdy + yddx}$; & la seconde se changera de même en $CV\ (n) = \frac{ydxds}{dx^2 - yddy}$.

XV. Supposons présentement que l'espace $BEC\ (\frac{ydx}{2})$ soit constant, en sorte que par tout l'on ait cet espace $BEC = AEB =$ &c. ou sa différence $dydx + yddx = 0$; Et par conséquent $ddx = -\frac{dydx}{y}$. La substitution de cette valeur particuliere de ddx dans la premiere & dans la troisiéme des formules generales de l'art. 13. changera la premiere en $CV\ (n) = \frac{ydyds^2}{dxdyds^2 - dxdyds - ydxdds} = \frac{dyds^2}{-dxdds}$; Et la troisiéme, en $CV\ (n) = \frac{yds^3}{dxds^2 - dxdy^2 - ydxddy} = \frac{yds^3}{dx^3 - ydxddy}$.

XVI. Telle est la maniere dont les formules generales de l'art. 13. fourniront différentes expressions des Rayons ofculateurs, felon ce qu'on y fuppofera de conftant, comme l'on vient de faire dx, dy, ds, & ydx, dans les articles 14 & 15. lefquels font affez voir l'immenfe fécondité de ces formules, & comment elles doivent fournir de même des expreffions des Rayons ofculateurs à l'infini, felon ce qu'on y fuppofera de conftant de tout ce que les valeurs arbitraires des expofans m, n, p, q, r, peuvent faire trouver de termes dans $y^m s^n dx^p dy^q ds^r$, pris comme l'on voudra : c'eft-à-dire, non-feulement un à un, mais deux ou plufieurs enfemble liés à difcretion par les fignes + ou —.

XVII. Il eft encore à remarquer que fuivant les noms donnés ci-deffus art. 1. & 12. la premiere des deux formules de l'art. 15. eft la même que celle de l'art. 8. Quant à ce qu'on a publié jufqu'ici de pareilles formules des Rayons ofculateurs, elles fe trouvent encore toutes dans le feul art. 14. ci-deffus, excepté les quatre que M. (Jacques) Bernoulli donna fans Analyfe dans les Actes de Leipfik au mois de Juin de 1694. Mais voici avec quelle facilité elles fuivent encore des formules generales de l'art. 13. ci-deffus, en fuppofant feulement l'arc $DFOQ = z$, décrit du centre E & du rayon $DE = a$: Car alors ayant $OE(a) . BE(y) :: OQ(dz) . BH(dx)$. c'eft-à-dire, $dx = \frac{ydz}{a}$, & $ddx = \frac{dydz + yddz}{a}$; Ces valeurs de dx & de ddx, fubftitués dans les formules generales de l'art. 13. les changeront en d'autres tout auffi generales, d'où celles de M. Bernoulli fuivent immédiatement & fans aucun calcul : Les voici.

Autres Formules infiniment generales des Rayons des Dévcloppées.

$$1^\circ.\ CV(n) = \frac{adyds^2}{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}.$$

$$2^\circ.\ CV(n) = \frac{aydzds^2}{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}.$$

$$3^\circ.\ CV(n) = \frac{ads^3}{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}.$$

XVIII. Pour tout ufage de ces nouvelles formules, je me contenterai d'en tirer feulement celles de M. Bernoulli. Pour cela :

1°. Soit dz conſtante, c'eſt-à-dire $ddz = o$; ce qui eſt la même choſe (*art.* 17.) que $\frac{dx}{y}$ conſtante, ou $y \cdot dx - dx\,dy = o$. En ce cas, la premiere des formules précédentes (*art.* 17.) donnera $CV(n) = \frac{adyds^2}{2dzdyds - ydzdds}$; Et la troiſiéme, $CV(n) = \frac{ads}{dzds^2 + dzdy^2 - ydzddy}$.

2°. Si l'on ſuppoſe dy conſtante, c'eſt-à-dire $ddy = o$: alors la ſeconde des précédentes formules generales (*art.* 17.) donnera $CV(n) = \frac{aydzds^2}{ydsdz^2 + aadydds}$; & la troiſiéme, $CV(n) = \frac{ads^3}{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz}$.

3°. Si l'on fait ds conſtante, c'eſt-à-dire, $dds = o$: alors la premiere des précédentes formules generales (*art.* 17.) donnera $CV(n) = \frac{adyds}{2dzdy + yddz}$; Et la ſeconde, $CV(n) = \frac{aydzds}{ydz^2 - aaddy}$.

XIX. La ſeconde, la quatriéme, & les deux dernieres de ces ſix formules particulieres, ſont les quatre de M. Bernoulli. Je les trouvai encore d'une autre maniere peu de tems après qu'il les eut rendues publiques, comme il paroît par l'Analyſe que j'en préſentai à l'Académie le 27. Novembre de la même année 1694. Cette Analyſe m'en donna auſſi ſix dont les deux autres étoient $CV(n) = \frac{ayydzds^3}{aads^4 - y^3dz^2ddy - aady^4}$ en ſuppoſant dz conſtante, & $CV(n) = \frac{ayydzds^3}{aads^4 + y^3dydzddz - aady^4}$ en ſuppoſant dy conſtante, leſquelles formules répondent à la premiere & à la troiſiéme du précédent article 18. avec leſquelles il eſt aiſé de les concilier. Les ſix de cet article 18. ſe tireroient encore de même de l'article 14. en y ſubſtituant les valeurs de dx & de ddx, contenues dans l'article 17. Les formules generales de cet art. 17. en fourniront encore autant d'autres que $z^l y^m s^n dz^\lambda dy^q ds^r$, pourra fournir de termes conſtans, c'eſt-à-dire, encore à l'infini; mais en voilà, ce me ſemble, aſſez pour en être convaincu.

Paſſons

Passons donc à l'usage de ces formules, pour l'invention des forces centrales dont il est ici question.

REMARQUE II.

Usage des Rayons Osculateurs précédens pour rendre aussi infiniment générale la Régle des Forces centrales des art. 2. 3. & 4.

XX. Ci-dessus (*art.* 2. 3. & 4.) en appellant dz ce que nous appellons ici dx, & en prenant y pour le nom des forces centrales que nous appellerons dorénavant f, l'on a trouvé $y = \frac{ds^3}{ndzdt^2}$. Donc en prenant encore ici comme là, ds pour l'élément de la Courbe, dt pour l'instant employé à le décrire ou à le parcourir, n pour son Rayon osculateur, & dz comme dans l'art. 17. Nous aurons aussi ici $f = \frac{ds^3}{ndxdt^2}$ (*art.* 17.) $= \frac{ads^3}{nydzdt^2}$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'à substituer les six valeurs infiniment générales de n, trouvées ci-dessus art. 13. & 17. pour en faire autant d'autres Régles des forces centrales de la même étendue que ces valeurs de n : Les voici.

Formules ou Régles infiniment générales des Forces Centrales.

$$1^o.\ f = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdydt^2}.$$

$$2^o.\ f = \frac{dx^2ds^2 + ydydsdds - yds^2ddy}{ydx^2dt^2}.$$

$$3^o.\ f = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydxdt^2}.$$

$$4^o.\ f = \frac{2dzdyds^2 + yds^2ddz - ydzdsdds}{ydydzdt^2}.$$

$$5^o.\ f = \frac{ydz^2ds^2 + aadydsdds - aads^2ddy}{yydz^2dt^2}.$$

$$6^o.\ f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}{ydzdt^2}.$$

XXI. Ces six formules des forces centrales en général, se diversifieront comme celles des rayons osculateurs des art. 13. & 17. ci-dessus, selon ce qu'on leur supposera de constant. Par exemple, 1°. Si l'on ſuppoſe dx conſtante, c'eſt-à-dire, $ddx = 0$, la premiere des précédentes formules générales art. 20. donnera $f = \frac{dyds^2 - ydsdds}{ydydt^2}$; Et la troiſiéme, $f = \frac{ds^2 - yddy}{ydt^2}$.

2°. Si l'on fait dy conſtante, c'eſt-à-dire $ddy = 0$, la ſeconde de ces mêmes formules générales de l'art. 20 donnera $f = \frac{dx^2 ds^2 + ydydsdds}{ydx^2 dt^2}$; La troiſiéme, $f = \frac{d[illegible]s^2 + y[illegible]ddx}{ydxdt^2}$; La cinquiéme, $f = \frac{ydz^2 ds^2 + aadydsdds}{yydz^2 dt^2}$; Et la ſixiéme, $f = \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz}{ydzdt^2}$.

3°. Si l'on fait ds conſtante, c'eſt-à-dire $dds = 0$, la premiere des mêmes formules générales de l'art. 20. donnera $f = \frac{dxdyds^2 + yds^2 ddx}{ydxdydt^2}$; La ſeconde, $f = \frac{dx^2 ds^2 - yds^2 ddy}{ydx^2 dt^2}$; La quatriéme, $f = \frac{2dzdyds^2 + yds^2 ddz}{ydydzdt^2}$; Et la cinquiéme, $f = \frac{ydz^2 ds^2 - aads^2 ddy}{yydz^2 dt^2}$.

4°. Enfin ſi l'on fait dz conſtante, c'eſt-à-dire, $ddz = 0$; ce qui eſt la même choſe (*art.* 17.) que $\frac{dx}{y}$ conſtante, ou que $yddx - dxdy = 0$: La quatriéme des mêmes formules générales de l'art. 20. donnera $f = \frac{2dyds^2 - ydsdds}{ydydt^2}$; Et la ſixiéme, $f = \frac{ds^2 + dy^2 - yddy}{ydt^2}$.

De ces douze formules les quatre premieres, la ſeptiéme & la huitiéme, ſont les mêmes que j'ai déja données dans la Remarque qui eſt à la fin du Memoire du 13. Novembre de 1700. Et les ſix autres ſont de ſurplus. On les auroit encore toutes en ſubſtituant les douze valeurs de n des articles 14. & 18. ci-deſſus, dans la ſeconde équation $f = \frac{ds^3}{ndxdt^2} = \frac{ads^3}{nydzdt^2}$ de l'art. 20.

XXII. Si l'on fait preſentement ydx conſtante, c'eſt-à-dire $dydx + yddx = 0$, ou $ddx = -\frac{dxdy}{y}$; la ſubſtitution de cette valeur de ddx dans la premiere & dans la troiſiéme des formules générales de l'art. 20. changera la premiere en $f = \frac{-dsdds}{dydt^2}$, & la troisiéme en $f = \frac{dx^2 - yddy}{ydt^2}$, qui sont aussi les deux formules que j'ai encore données dans le Mémoire du 13. Novembre de l'année passée. La substitution des valeurs de n de l'art. 15. dans la seconde équation $f = \frac{ds^3}{ndxdt^2}$ de l'art. 20. les donneroit encore toutes deux.

C'est ainsi que les six formules générales de l'art. 20. en produiront de nouvelles à l'infini, selon la variété infinie des termes constans que peut fournir $z^l y^m s^n dz^\lambda dx^p dy^q ds^r$; ce qui est presentement trop visible pour s'y arrêter davantage. Passons donc à une autre maniere de trouver ces mêmes formules générales indépendamment des Rayons des Développées.

REMARQUE III.

Autre maniere infiniment générale de déterminer les Forces centrales sans le secours des Rayons des Développées, &c.

XXIII. Pour déterminer presentement les Forces centrales sans le secours des Rayons des Développées, & cependant d'une maniere aussi générale que ci-dessus art. 20. il faut reprendre le commencement de l'art. 13. lequel donne en général $NP = \frac{dsddx - dxdds}{dx}$; Et la ressemblance (*art.* 12.) des triangles PHB, PNC, donnera $PH\,(dy).\ BP\,(ds) :: NP\,\left(\frac{dsddx - dxdds}{dx}\right).\ PC = \frac{ds^2ddx - dxdsdds}{dxdy}$.

De plus les angles SBP & SEB (*art.* 12.) égaux entr'eux, & l'angle S commun aux deux triangles BSP & ESB, rendant ces triangles semblables, l'on aura aussi $SE\,(y).\ SB\,(ds) :: SB\,(ds).\ SP = \frac{ds^2}{y}$. Donc $SC\,(SP + PC) = \frac{ds^2}{y} + \frac{ds^2ddx - dxdsdds}{dxdy} = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdy}$.

Mais SC étant l'espace que la force centrale (f) tendante en E ſuivant SE, fait faire en ce ſens au corps qui décrit la Courbe $DABC$, dans l'inſtant dt qu'il parcourt BC, au-lieu de ſuivre la tangente BR : Et cet eſpace SC parcouru en vertu de cette force conſtante à chaque inſtant, étant d'ailleurs en raiſon compoſée de cette force & du quarré de cet inſtant; L'on aura auſſi $CS = fdt^2$. Donc enfin $fdt^2 = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdy}$, ou bien $f = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdydt^2}$; Ce qui eſt la premiere des ſix formules ou Régles infiniment générales de l'art. 20. Et par conſequent les cinq autres s'en déduiront de la même maniere que des ſix formules infiniment générales des Rayons oſculateurs des art. 13. & 17. les cinq dernieres ont été déduites de la premiere. Tout cela eſt preſentement trop aiſé pour s'y arrêter davantage.

XXIV. J'ajoûterai ſeulement que ſi ces Rayons oſculateurs ont ſervi (*art.* 20.) à trouver ces Forces centrales, ces mêmes Forces peuvent auſſi ſervir à trouver ces Rayons d'une maniere encore infiniment générale. En effet puiſque (art. 23.) $SC = fdt^2$, l'on aura auſſi $\frac{SC}{dt^2} = f$ (art. 23.) $= \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdydt^2}$, c'eſt-à-dire $SC = \frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdy}$.

Or à cauſe des triangles (*art.* 12.) ſemblables SHB & SMC, l'on aura $BS\ (ds) . BH\ (dx) :: SC \left(\frac{dxdyds^2 + yds^2ddx - ydxdsdds}{ydxdy}\right) . MC = \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy}$.

Donc les rayons BV, CV, de la Développée, & l'arc MC décrit du centre B, rendant auſſi (*art.* 12.) les triangles MBC & BVC ſemblables, l'on aura enfin $MC \left(\frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy}\right) . BC\ (ds) :: BC\ (ds) . CV = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$. Ce qui eſt juſtement la premiere des expreſſions infiniment générales des Rayons oſculateurs de l'art. 13. Ainſi les deux autres formules de cet article, & les trois de l'article 17. s'en déduiront encore comme dans ces mêmes articles.

XXV. En un mot les forces centrales étant toujours $f = \frac{SC}{dt^2}$, il est visible que leur expression étant donnée, l'on aura aussi-tôt celle de SC, laquelle servira à trouver les Rayons des Développées de la maniere ci-dessus art. 24.

Reciproquement le Rayon de la Développée étant toujours $CV = \frac{ds^2}{MC}$, il est pareillement visible que son expression étant donnée, l'on aura aussi toujours celle de MC, laquelle donnera ensuite celle de SC, en ce que $BH\,(dx) . BS\,(ds) :: MC . SC = \frac{MC \times ds}{dx}$. Et l'expression de SC étant ainsi trouvée, celle des Forces centrales se trouvera comme ci-dessus art. 23.

D'où l'on voit en général qu'il y a autant de manieres de trouver les Rayons des Développées, qu'il y en a de trouver les Forces centrales; Et reciproquement.

J'ai encore une autre maniere infiniment générale de trouver ces Rayons & ces Forces indépendamment les uns des autres; mais celle des art. 13. & 23. suffit. Ainsi passons à d'autres Régles encore plus générales des Forces centrales.

XXVI. Soit donc encore la Courbe DBC dont les Ordonnées concourent en E, mais dont les Forces centrales concourent presentement en tel autre point F qu'on voudra du plan de cette Courbe. Soient, dis-je, encore $BC = ds$ les élemens de cette Courbe; Ses Ordonnées $CE = y$; $DE = a$ une droite constante; Les arcs $DQ = z$, & $BH = dx$ (art. 17.) $= \frac{ydz}{a}$, décrits du centre E; f le nom des Forces centrales tendantes en F, & dt celui de l'instant employé à décrire chaque élement BC de la Courbe en question. Si de plus sur le diametre EF, on fait le cercle EMF, qui rencontre EC en M; & qu'après avoir fait $EM = m$, on fasse aussi la droite $FM = n$, & $CF = r$; L'on aura encore les Régles suivantes, lesquelles sont d'autant plus générales que les précédentes FIG. 6.

n'en font même qu'un Corollaire : Les voici les dernieres, parce qu'elles me font venues de même en fuivant la route des précédentes.

Régles des Forces Centrales, plus générales encore que celles de l'article 20.

$$1^{\circ}.\ f = \frac{rdxdyds^2 + rydsˆ2 ddx - rydxdsdds}{ydydt^2\,\overline{xydx - mdx + ndy}}.$$

$$2^{\circ}.\ f = \frac{rdx^2ds^2 + rydydsdds - ryds^2ddy}{ydxdt^2\,\overline{xydx - mdx + ndy}}.$$

$$3^{\circ}.\ f = \frac{rdxds^2 + rydyddx - rydxddy}{ydt^2\,\overline{xydx - mdx + ndy}}.$$

$$4^{\circ}.\ f = \frac{2rdzdyds^2 + ryds^2ddz - rydzdsdds}{dydt^2\,\overline{xyydz - mydz + andy}}.$$

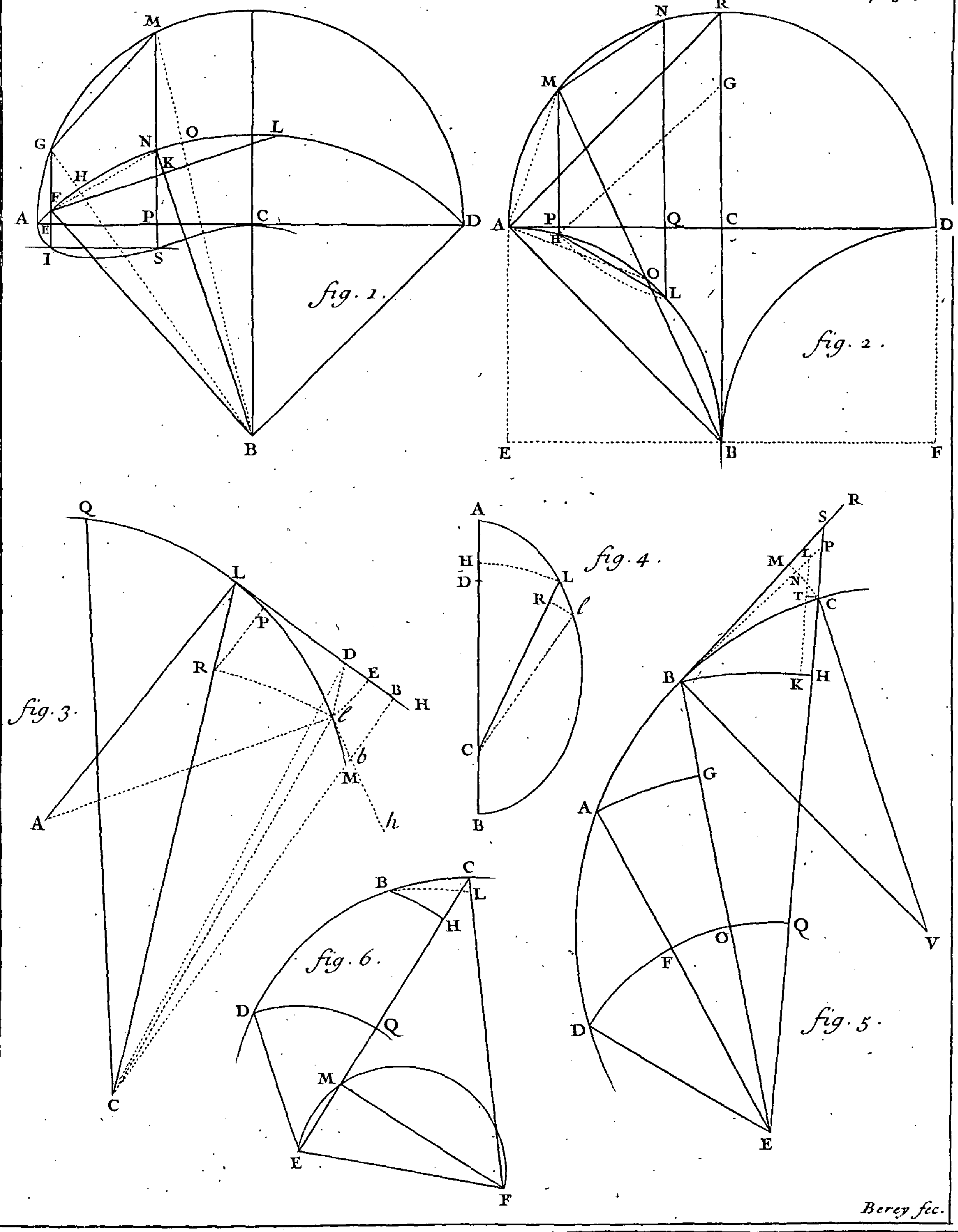
$$5^{\circ}.\ f = \frac{rydz^2ds^2 + aardydsdds - aards^2ddy}{ydzdt^2\,\overline{xyydz - mydz + andy}}.$$

$$6^{\circ}.\ f = \frac{rdzds^2 + rdzdy^2 + rydyddz - rydzddy}{dt^2\,\overline{xyydz - mydz + andy}}.$$

XXVII. Voilà d'une maniere encore infiniment générale (c'eft-à-dire fans y fuppofer encore rien de conftant, hors la grandeur a) pour l'hypothéfe des Ordonnées concourantes en un même point E, pendant que les Forces centrales tendent à un autre quelconque F pris auffi dans le plan de la Courbe. Mais fi l'on veut que ces deux points foient le même comme ci-deffus, art. 20. 21. 22. 23. 24. & 25. Alors EF fe trouvant nulle, & par conféquent auffi $EM\,(m) = 0 = MF\,(n)$, & $CF\,(r) = CE\,(y)$, ces fix formules du précédent art. 26. fe changeront en celles de l'art. 20. que je ne repete point ici, étant aifé de les déduire de celles-ci.

Je ne dirai rien non plus de tout ce que ces fix Regles du précédent article 26. pourroient encore en fournir de particulieres, felon que l'on rendroit E ou F infiniment éloigné, & felon la varieté infinie de tout ce qu'on y peut fuppofer de conftant; tout cela étant prefentement trop aifé pour s'y arrêter davantage.

Tout ce que l'on peut faire d'hypothéfes des tems,



Berey fec.

peut aussi diversifier ces Regles en une infinité d'autres manieres : Par exemple, si l'on veut avec Kepler, M. Newton, & M. Leibnitz, que les tems dt soient comme les produits $CF \times BL$ correspondans, où $dt = CF \times BL$, dont BL est un arc décrit du centre F; cet arc étant $= \frac{ydx - mdx + ndy}{r}$ (art. 17.) $= \frac{yydz - mydz + andy}{ar}$, & $CF = r$, il n'y aura qu'à substituer $ydx - mdx + ndy$ à la place de dt dans les trois premieres de ces six Regles, & $\frac{yydz - mydz + adny}{a}$ dans les trois dernieres, pour les rendre toutes propres & particulieres à l'hypothése de ces trois Auteurs, sans cependant qu'elles cessent d'être infiniment générales, cette hypothése n'y introduisant encore rien de constant. Toutes ces Régles se reduiront de même à telle autre hypothése des tems qu'on voudra faire; ainsi cet exemple suffit.

XXVIII. Je finis donc en remarquant seulement que si au-lieu des tems qui entrent dans les Régles précédentes des Forces centrales, on y veut introduire les vîtesses des corps qui décrivent les Courbes en question, il n'y aura (en prenant v pour ces vîtesses) qu'à y substituer par tout $\frac{ds^2}{vv}$ à la place de dt^2, à cause de $\frac{ds}{dt} = v$, ou de $\frac{ds}{v} = dt$; Ce qui pourra être d'un grand usage tant pour le choix des hypothéses & des tems en Astronomie, que pour la solution des Problêmes où les vîtesses seroient données au-lieu des tems.

Par exemple dans l'article 6. ci-dessus, ayant trouvé $\frac{2a}{bbrr} = y = \frac{ds^2}{r^3 dz^2} - \frac{2a+4r}{bbrr}$, ou $\frac{4a-4r}{bbr} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (*hyp.*) $= \frac{ds^2}{dt^2} = vv$; l'on aura $v = \frac{2}{b} \sqrt{\frac{a-r}{r}}$ pour la vîtesse de la Planette ou du corps qui décriroit l'Ellipse ordinaire dans l'hypothése de $dt = rdz$, c'est-à-dire, dans des Tems qui seroient comme les Aires prises à la maniére de Kepler, de M. Newton, & de M. Leibnitz.

De même si l'on introduit v à la place des valeurs de $\frac{ds}{dt}$, qu'on a trouvées dans le Memoire du 13. Novembre de 1700. où j'ai démontré les Forces centrales ou les Pesanteurs nécessaires aux Planetes pour leur faire décrire les Orbes qu'on leur a supposé jusqu'ici, on trouvera aussi

Prob. 1. $v = \frac{2}{b}\sqrt{\frac{a-r}{r}}$.

Prob. 2. $v = \frac{2}{mb}\sqrt{\frac{1}{r \times \overline{a-r}^{3}}}$.

Prob. 3. $v = \frac{2ar\sqrt{2aamm + 2r^4 - ccrr}}{3r^4 + aamm - ccrr}$.

Prob. 4. $v = \frac{2am\sqrt{2aamm + 2r^4 - ccrr}}{3aammr + r^5 - ccr^3}$.

Prob. 5. $v = \frac{4a^3 + 4acc - 2arr}{3aab + bcc - brr}$.

Prob. 6. $v. = \frac{2a}{rr + aa - cc}$.

Dans lesquelles valeurs de v, il n'y a que r de grandeurs variables. Ce qui donnera le rapport des vîtesses de la Planette dans tous les points de son Orbe, selon l'une & l'autre hypothése des tems proposés dans ces Problêmes; & ce qui comparé aux observations Astronomiques peut aider aussi à déterminer laquelle de ces deux hypothéses est préférable à l'autre. Mais cela nous meneroit trop loin, outre que je ne me suis peut-être déja que trop étendu pour un simple Mémoire.

OBSERVATIONS