Lemme, les forces néceſſaires aux Planétes vers le dedans de leurs orbes, pour les décrire & ne point s'échapper par leurs touchantes, doivent preſque toujours conſpirer à les y mouvoir avec des vîteſſes réellement différentes ; & que ſur une infinité de cas, il n'y en a qu'un ſeul où elles s'y puiſſent mouvoir uniformement.

M. Newton & M. Leibnitz ſont les premiers & même les ſeuls que je ſçache, qui ayent recherché ces peſanteurs des Planétes : les voici encore d'une autre maniére. Et parce que la plus grande difficulté conſiſte dans les mouvemens variés de ces Planétes ſur leurs orbes, je commencerai par les ſyſtêmes qui les ſuppoſent tels, & ſelon l'ordre qu'ils ont été imaginés, pour finir enfin par ceux qui les ſuppoſent uniformes, quoique les plus anciens ; ſur-tout ceux-ci ne faiſant qu'un cas entre une infinité d'autres, ainſi qu'on le va voir par le Corol. 2. du premier Lemme ſuivant. Soit donc pour cela.

Définition. Dans une courbe quelconque, j'appelle *Rayons des Forces* du Corps qui la décrit, les droites tirées de ce Corps au point où concourent les directions de ce qu'il en doit avoir pour la décrire, ſans autre ſecours que celui d'une premiére impreſſion à angle quelconque avec la premiére de ces directions, & ne point s'échapper par la touchante au point où il ſe trouve, ainſi qu'il lui arriveroit ſans de telles forces que j'appellerai *Centrales*, leſquelles ſont les ſeules que je lui ſuppoſe dans toute la durée de ſon mouvement.

LEMME I.

Si l'on ſuppoſe qu'un Corps L, *dont la force centrale tende en* C *ſuivant* L C, *décrive une courbe quelconque* Q L M *dans un milieu qui n'augmente ni diminuë ſon mouvement, non plus que s'il ſe mouvoit dans le vuide ; ſa vîteſſe ſuivant* L M *ſur cette courbe, ne ſera uniforme que lorſque tous les rayons* L C *des forces, ſeront perpendiculaires à cette même courbe. Elle ſera au contraire toujours accélérée, tant que l'angle* C L P *ſera aigu, & retardée tant qu'il ſera obtus.* FIG. I.

DEMONST. Soient les rayons CL, Cl, indéfiniment proches l'un de l'autre ; soit de plus décrit du centre C, l'Arc lR qui rencontre LC en R, duquel point R soit aussi RP perpendiculaire sur Ll. Cela posé, il est visible que si la force centrale du Corps L ne faisoit d'impression sur ce Corps, que suivant PR (*hyp.*) perpendiculaire à la courbe QLM, & non suivant la direction LP de cette courbe, cette force le retiendroit seulement sur cette même courbe, sans l'y avancer ni retarder, ne faisant rien pour ni contre son mouvement suivant Ll : mais que si elle lui en donne aussi suivant LP, elle l'accélerera ; puisque ce qu'il lui en doit résulter de vîtesse en ce sens, la doit augmenter. Par la même raison cette force centrale retarderoit le mouvement de ce Corps suivant LQ par l'impression qu'elle feroit sur lui à contre sens de LP. Or tant que le rayon de tendance LC est oblique à la courbe, la force centrale du corps L vers C, n'agit pas seulement suivant PR, mais aussi suivant LP en faveur de son mouvement vers M, si l'angle RLP est aigu ; ou contre ce mouvement, si cet angle est obtus. Donc aussi pour lors la force centrale tendante en C, accélerera ou retardera toujours ce mouvement, excepté lorsque cet angle sera droit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. I. Donc un Corps décrivant une courbe quelconque avec des forces centrales qui tendent toutes à un même point C, son mouvement sur cette courbe ne sçauroit être uniforme, que lorsqu'elle est un cercle dont C est le centre ; puisque hors le cercle il n'y a point de courbe dont toutes les perpendiculaires concourent à un même point.

FIG. II. COROL. II. Afin donc que le mouvement sur telle courbe ALM qu'on voudra, soit uniforme, il faut que les forces centrales du Corps mû tendent suivant les rayons de sa développée AC, c'est-à-dire, que les rayons des forces soient ces rayons eux-mêmes LC de la développée ; puisqu'ils lui sont tous & les seuls qui lui soient perpendiculaires. Et en ce cas R & P se confondant avec L, la force centrale tendante en C, ne fera plus d'impreſſion ſuivant la direction de la courbe, mais ſeulement ſuivant la perpendiculaire $L\,C$: de maniére que le mouvement du Corps L ſuivant $L\,M$, n'en ſera plus accéleré ni retardé; ce qui rendra pour lors les Arcs $L\,l\,(ds)$ parcourus, en raiſon des tems (dt) employés à les parcourir, ou $ds = dt$.

SCHOL. Entre pluſieurs Regles que j'ai des forces centrales, tant *centrifuges* que *centripetes*, je ne me ſervirai ici que de celle que je donnai le 31. Mars dernier à l'Académie. Et afin de ne rien ſuppoſer d'ailleurs, en voici la démonſtration en peu de mots.

LEMME II.

Un Corps L *décrivant une courbe quelconque* QLM, *trouver ſes forces centrales en général.* FIG. I.

SOLUT. Dans la figure premiére, ſoient encore du centre C les rayons CL, Cl, indéfiniment proches l'un de l'autre, avec les Arcs LH, lR, dont le premier rencontre AC en H, & le ſecond, CL en R; duquel point R ſoit encore auſſi RP perpendiculaire ſur Ll. Soient de plus $AH = x$, HC ou $LC = r$, $Rl = dz$, $Ll = ds$, $v =$ la vîteſſe (du Corps mû) en L ſuivant LM, $dt =$ le tems (inſtant) que ce Corps met à parcourir Ll, $y =$ ſa force centrale en L, ou ce qu'il a là de peſanteur vers C. Cela poſé, l'on aura dv pour l'accroiſſement de vîteſſe, qui réſulte de cette force (y) au Corps mû ſuivant Ll pendant l'inſtant dt; & dds pour ce que ce Corps parcourt alors d'eſpace en vertu de cet accroiſſement de vîteſſe. Enfin en prenant $AC = a$, l'on aura auſſi $a = x + r$; ce qui donne $dx + dr = o$, ou $dx = -dr$, en différentiant le tout poſitivement.

A ce compte, la force abſolue (y) en L vers C, étant à ce que le Corps mû en reçoit d'elle ſuivant $Ll :: LR . LP :: Ll\,(ds) . LR\,(dx)$. Cette force ſuivant Ll, ſera $= \frac{y\,dx}{ds}$. Or les eſpaces parcourus avec des forces conſtantes

& continuellement appliquées, telles qu'on conçoit d'ordinaire la pesanteur, & telle qu'est aussi toute force instantanée, étant en raison composée de celles de ces forces & des quarrés des tems employés à les parcourir; l'on aura aussi $dds = \frac{ydx}{ds} \times dt^2$. Donc $y = \frac{dsdds}{dxdt^2}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOL. Si l'on ajoute à cette Figure 1. une courbe TD, dont les ordonnées HT (perpendiculaires sur AC) expriment les tems suivant lesquels se doit régler le mouvement du Corps qu'on suppose décrire la courbe QLM; & qu'après avoir fait aux points correspondans L, T, de ces courbes données QL, DT, les tangentes LN, TK, avec CN perpendiculaire à CL l'on imagine encore une autre courbe BO, qui ait par-tout ses ordonnées correspondantes $HB = \frac{E \times LN \times HK}{LC \times HT}$, dont E soit une grandeur constante arbitraire, & BG sa tangente en B: l'on aura encore en général les forces centrales $y = \frac{\overline{LN \times HK}^2}{HG \times \overline{LC \times HT}^2}$. Mais quelque simple que cette formule paroisse pour être en grandeurs toutes finies, & quelque facile qu'en soit effectivement l'usage, il faut pourtant avouer qu'il l'est beaucoup moins que celui de la précédente: c'est pour cela que nous ne nous arrêterons pas davantage à celle-ci, & que l'autre au contraire nous servira toujours de Regle générale dans la suite.

REGLE.

$$y = \frac{dsdds}{dxdt^2}.$$

AVERTISSEMENT. Voici quelques usages de cette Regle dans les Problêmes suivans, & selon l'ordre marqué ci-dessus, en prenant par-tout les tems (t) comme les aires $ACLQ$ $\left(\int \frac{rdz}{2}\right)$, ou $dt = rdz$, suivant la Prop.

1. Sect. 2. Liv. 1. de M. Newton, *De Phil. nat. Princ. Mat.*

PROBLEME I.

Soient, ainsi que le supposent M. Newton, & M. Leibnitz avec Kepler, les orbes des Planétes, de véritables Ellipses, dans le foyer commun desquels soit le Soleil. Il s'agit de trouver quelles doivent être les pesanteurs ou les efforts de ces Planétes vers le Soleil, pour leur faire ainsi décrire des orbes Elliptiques. FIG. III.

SOLUT. Soit donc l'orbe d'une Planéte quelconque L, l'Ellipse ALB, dont les foyers sont C & D, au premier desquels soit le Soleil C. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus (*Lem.* 2.), sçavoir $CL = r$, la partie Rl de l'Arc hl (décrit du centre C) $= dz$, $Ah = x$, $AL = s$, & $y =$ la force centrale, ou la pesanteur vers C de la Planéte en L; soit de plus le grand axe (de l'Ellipse) $AB = a$, & la distance (des foyers) $CD = c$.

La nature de l'Ellipse ordinaire, dont il s'agit ici, donnera $dr\sqrt{aa - cc} = dz\sqrt{cc - aa + 4ar - 4rr}$ pour son équation au foyer C, ou (en prenant $bb = aa - cc$) $bdr = dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}$. Donc $\overline{4ar - 4rr} \times dz^2 = bbdr^2 + bbdz^2 = bbds^2$, ou $\frac{4a - 4r}{r} = \frac{bbds^2}{rrdz^2}$ (*Avert.*) $= \frac{bbds^2}{dt^2}$; Et en prenant dt pour constante, $\frac{2bbdsdds}{dt^2} = \frac{-4adr}{rr}$ (*Sol. Lem.* 2.) $= \frac{4adx}{rr}$, ou $\frac{2a}{bbrr} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (*Reg.*) $= y$: c'est-à-dire (à cause de la fraction constante $\frac{2a}{bb}$) les forces centrales, ou les pesanteurs de la Planéte L vers le Soleil ou foyer C, comme les $\frac{1}{rr}$, ou en raison réciproque des quarrés de ses distances LC (r) à ce foyer. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROL. I. La même chose $\left(y = \frac{2a}{bbrr}\right)$ se trouvera pour l'hyperbole, dont C seroit le foyer intérieur; puisqu'en prenant seulement $bb = cc - aa$, à cause qu'elle a $c > a$, elle aura aussi la même équation $bdr = dz \sqrt{4ar + 4rr - bb}$ que l'Ellipse précédente, excepté que $-4rr$ se change ici en $+4rr$.

COROL. II. Si outre cela on change les signes de $4ar - 4rr$ pour l'hyperbole, dont C seroit le foyer extérieur, l'équation $bdr = dz\sqrt{4rr - 4ar - bb}$ qui lui en résultera, donnera aussi de même $y = \frac{-2a}{bbrr}$: c'est-à-dire, encore les forces centrales par rapport à ce foyer, en raison réciproque des quarrés des distances CL; avec cette différence seulement que ces forces seront ici centrifuges ou de legereté, au lieu que dans l'Ellipse, & à l'autre foyer de l'hyperbole, elles étoient centripétes ou de pesanteur.

COROL. III. Si l'on fait présentement $BC = m$: alors trouvant $aa - cc\,(bb) = 4am - 4mm$ dans l'Ellipse, & $cc - aa\,(bb) = 4am + 4mm$ dans l'Hyperbole, ou de part & d'autre $bb = 4am$, en faisant a (AB) infinie, comme dans la Parabole en laquelle se changent alors l'Ellipse & l'Hyperbole : l'on n'aura qu'à substituer cette derniére valeur de bb dans la formule $y = \frac{2a}{bbrr}$ de la Solution & du Corol. 1. pour avoir $y = \frac{1}{2mrr}$ au foyer de cette Parabole, c'est-à-dire encore, les forces centrales tendantes à ce foyer, en raison réciproque des quarrés de distances CL (r) de ce même foyer au Corps qui la décrit.

COROL. IV. Ainsi en général les forces centrales tendantes à quelque foyer de section conique que ce soit, sont dans toutes ces sections en raison réciproque des quarrés des distances de ce foyer au Corps qui les décrit.

SCHOL. Tout ceci est conforme à ce que M. Newton & M. Leibnitz en ont démontré à leurs maniéres : le premier dans les Prop. 11. 12. & 13. du Liv. 1. de son excellent Traité, *De Phil. nat. Princ. Math.* Et le second dans le mois de Février des Actes de Leipsik de 1689.

AVERTISSEMENT. II. Il paroît par l'Avertiſſement qui ſuit la Regle précédente, que mon premier deſſein étoit de ne chercher les forces centrales des Planétes que dans l'hypothéſe de Kepler, de M. Newton, & de M. Leibnitz, comme la plus phyſique, en me propoſant de faire par-tout $dt = r\,dz$; mais ayant depuis fait reflèxion que cette hypothéſe des tems n'eſt pourtant pas la ſeule qui ſe faſſe en Aſtronomie, voici comment je ſatisfais à toutes, en prenant ſeulement $r\,dz$ conſtant dans cette Regle, ainſi qu'elle le ſuppoſe, quelles que ſoient d'ailleurs les hypothéſes des tems, ou les valeurs de dt.

PROBLEME II.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le Prob. 1. excepté qu'on ſuppoſe ici les tems (t) *qu'employe la Planéte* L *à parcourir les arcs* A L *de l'Ellipſe* A L B, *en raiſon des angles* A D L, *ou des arcs* A E *décrits du foyer* D *comme centre, ainſi que Sethus Wardus le ſuppoſe avec pluſieurs Aſtronomes modernes qui ne retiennent ici de Kepler que ſon Ellipſe ; c'eſt-à-dire*, AE = t, *ou* Ee = dt : *il s'agit de trouver encore dans cette hypothéſe les efforts ou les peſanteurs de cette Planéte* L *vers le Soleil* C. FIG. III.

SOLUT. Soit de plus l'arc Lr décrit du foyer D comme centre, & $AD = m$ conſtante. La propriété de l'Ellipſe ordinaire dont il s'agit ici, étant d'avoir $DL + LC - AB = Dl + lC$; & les arcs lR, Lr, décrits (*hyp.*) des centres C & D, donnant d'ailleurs $DL + RC = Dr + lC$, il reſultera $LR = lr$. Et par conſéquent auſſi $Lr = lR$ (*hyp.*) $= dz$. Or $LD\ (a - r)$. DE ou $AD\ (m) :: Lr\ (dz)$. $Ee\,(dt) = \frac{m\,dz}{a - r}$. Ce qui donne $dt^2 = \frac{mm\,dz^2}{\overline{a - r}^2}$.

Mais dans la Solution du Problême précédent, l'on a trouvé $b\,dr = dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}$, ou $\overline{4ar - 4rr} \times dz^2 = bb\,dr^2 + bb\,dz^2 = bb\,ds^2$; Ce qui donne auſſi $\frac{4ar\,dz^2 - 4rr\,dz^2}{bb} = ds^2$, & d'où réſulte de plus $2\,ds\,dds$

$= \frac{4adrdz^2 + 8ardzddz - 8rdrdz^2 - 8rrdzddz}{bb}$, ou $\frac{dsdds}{dxdt^2}$ (y) $= \frac{2adrdz^2 - 4rdrdz^2 + 4ardzddz - 4rrdzddz}{bbdxdt^2}$ (Avertiſ. 2. $ddz = -\frac{drdz}{r}$) $= \frac{2adrdz^2 - 4rdrdz^2 - 4adrdz^2 + 4rdrdz^2}{bbdxdt^2}$ $= \frac{-2adrdz^2}{bbdxdt^2}$ (à cauſe de $dx = -dr$ Solut. Lem. 2.) $= \frac{2adz^2}{bbdt^2}$ (à cauſe que ci-deſſus $dt^2 = \frac{mmdz^2}{\overline{a-r}^2}$) $= \frac{2a \times \overline{a-r}^2}{bbmm}$ $= \frac{2a}{bbmm} \times \overline{DL}^2$: c'eſt-à-dire, que les forces centrales tendantes en *C*, ſeroient ici comme les quarrés des diſtances de la Planéte *L* à l'autre foyer *D* de l'Ellipſe qu'elle décrit. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOL. On voit aſſez par les Corollaires du Prob. 1. comment tout ceci ſe peut appliquer à l'Hyperbole & à la Parabole. Voilà pour ce qui regarde l'Ellipſe ordinaire introduite par Kepler dans l'Aſtronomie : Voyons préſentement celle de M. Caſſini.

PROBLEME III.

FIG. III. *Soit préſentement l'Orbe* ALB *des Planétes, l'Ellipſe de M. Caſſini, telle que* C *&* D *en étant encore les foyers pris ſur ſon grand axe* AB, *elle donne par-tout* CL × LD = AC × AD = AC × CB, *& ſur laquelle ces Planétes ſe meuvent dans des tems* (t) *qui ſoient encore comme les angles* ADL *qui répondent aux arcs* AL *parcourus, c'eſt-à-dire, qui ſoient en raiſon des arcs circulaires* AE *décrits du foyer* D *comme centre : de ſorte qu'en prenant ces arcs* AE *pour ces tems* (t), *l'on ait encore* Ee = dt. *On demande les efforts ou les peſanteurs néceſſaires à ces Planétes vers le Soleil* C, *pour leur faire décrire de telles Ellipſes.*

SOLUT. Soient encore $CL = r$, $AL = s$, $Ah = x$, $Rl = dz$, $CD = c$, & AD ou $CB = m$; ſoit de plus AC ou $BD = a$. L'on aura par la ſuppoſition, $a = m + c$; & par la nature de cette Ellipſe, am ($AD \times BD$) $= r \times DL$ ($CL \times DL$) : d'où réſulte $LD = \frac{am}{r}$. Ce qui par

par la Géométrie ordinaire (le calcul en eſt plus long que difficile) donnera pour l'équation au foyer C de cette Ellipſe, $ds^2 = \frac{8a^4m^4 + 8a^2m^2r^4 - 4a^2m^2c^2r^2}{2a^2m^2c^2r^2 - a^4m^4 + 2a^2m^2r^4 - c^4r^4 + 2c^2r^6 - r^8} \times dr^2$. De ſorte qu'en prenant $p = 8a^4m^4 + 8aammr^4 - 4aammccrr$, & $q = 2aammccrr - a^4m^4 + 2aammr^4 - c^4r^4 + 2ccr^6 - r^8$, l'on aura auſſi $ds^2 = \frac{pdr^2}{q} = \frac{pds^2 - pdz^2}{q}$, d'où reſulte $qds^2 = pds^2 - pdz^2$, ou $ds^2 = \frac{pdz^2}{p-q}$; ce qui donne auſſi $2dsdds = \frac{\overline{p-q} \times \overline{dpdz^2 + 2pdzddz} - \overline{dp + dq} \times pdz^2}{\overline{p-q}^2}$ $= \frac{pdqdz^2 - qdpdz^2 + \overline{p-q} \times 2pdzddz}{\overline{p-q}^2}$ (Avert. 2. $ddz = -\frac{drdz}{r}$) $= \frac{prdqdz^2 - qrdpdz^2 - 2ppdrdz^2 + 2pqdrdz^2}{r \times \overline{p-q}^2}$. Donc $\frac{dsdds}{dxdt^2}$, ou (Reg.) $y = \frac{prdq - qrdp - 2ppdr + 2pqdr}{\overline{p-q}^2 \times 2rdxdt^2} \times dz^2$ (à cauſe de $dx = -dr$ Solution, Lem. 2.) $= \frac{qrdp - prdq + 2ppdr - 2pqdr}{\overline{p-q}^2 \times 2rdrdt^2} \times dz^2$.

Or de ce que $LD = \frac{am}{r}$, l'on aura auſſi ſa différentielle $lr = \frac{-amdr}{rr}$. Et par conſéquent $\overline{Lr}^2$ ($\overline{Ll}^2 - \overline{lr}^2$) $= ds^2 - \frac{aammdr^2}{r^4} = \frac{r^4ds^2 - aammdr^2}{r^4}$. De plus $\overline{LD}^2$ $\left(\frac{aamm}{rr}\right)$. $\overline{ED}^2$, ou $\overline{AD}^2$ $(mm) :: \overline{Lr}^2 \left(\frac{r^4ds^2 - aammdr^2}{r^4}\right)$. $\overline{Ee}^2$ $(dt^2) = \frac{r^4ds^2 - aammdr^2}{aarr}$ ($dr^2 = ds^2 - dz^2$) $= \frac{r^4ds^2 - aammds^2 + aammdz^2}{aarr}$ (à cauſe de $ds^2 = \frac{pdz^2}{p-q}$) $= \frac{pr^4 - aammp + aammp - aammq}{\overline{p-q} \times aarr} \times dz^2 = \frac{pr^4 - aammq}{\overline{p-q} \times aarr} \times dz^2$. Donc en ſubſtituant cette valeur de dt^2 dans la précédente valeur de y, l'on aura la force centrale cherchée $y = \frac{aaqrrdp - aaprrdq + 2aapprdr - 2aapqrdr}{\overline{p-q} \times \overline{pr^4 - aammq} \times 2dr}$.

Mais ſuivant les valeurs précédentes de p & de q, l'on aura $dp = 32aammr^3dr - 8aammccrdr$, & dq

$= 4aammccrdr + 8aammr^3dr - 4c^4r^3dr + 12ccr^5dr - 8r^7dr$. Donc en ſubſtituant ces valeurs de dp & dq dans la derniére valeur de y, l'on aura enfin . . .

$$y = \frac{\left\{\begin{matrix} +16a^4mmqr^5 - 4a^4mmccqr^3 - 2a^4mmccpr^3 - 4a^4mmpr^5 \\ +2aac^4pr^5 - 6aaccpr^7 + 4aapr^9 + aappr - aapqr \end{matrix}\right.}{\overline{p-q} \times \overline{pr^4 - aammq}}$$

pour l'expreſſion des forces centrales tendantes au foyer C de l'Ellipſe de M. Caſſini, décrite dans des tems qui ſoient comme les angles ADL, ainſi qu'il le ſuppoſe. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME IV.

FIG. III. *Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le Prob. 3. excepté qu'au lieu de ſuppoſer comme M. Caſſini, les tems* (t) *ſur* AL *en raiſon des angles* ADL, *on les ſuppoſe ici à la maniére de Kepler, c'eſt-à-dire, en raiſon des eſpaces ou des aires* ACL, *de ſorte que l'on aura ici* dt, *comme les eſpaces* LCl *que la Regle ſuppoſe conſtans, où* dt = rdz *conſtant. On demande préſentement les forces centrales tendantes au foyer* C *de l'Ellipſe de M. Caſſini, néceſſaires à une Planéte, pour lui faire décrire cette Ellipſe dans cette hypothéſe des tems.*

SOLUT. Puiſque (*Solut. Prob. 3.*) $ds^2 = \frac{pdz^2}{p-q}$, l'on aura auſſi $\frac{p}{p-q} = \frac{ds^2}{dz^2}$, ou $\frac{p}{prr-qrr} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (hyp.) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Donc (dt étant ſuppoſée conſtante) $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-qrdp - 2ppdr + prdq + 2pqdr}{r^3 \times \overline{p-q}^2}$. Donc auſſi $\frac{dsdds}{dxdt^2}$, ou (Reg.) $y = \frac{-qrdp - 2ppdr + prdq + 2pqdr}{\overline{p-q}^2 \times 2r^3dx}$ (à cauſe $dx = -dr$ Solut. Lem. 2.) $= \frac{qrdp + 2ppdr - prdq - 2pqdr}{\overline{p-q}^2 \times 2r^3dr}$ (à cauſe que ci-deſſus, Solut. Prob. 3. $dp = 32aammr^3dr - 8aammccrdr$, & $dq = 4aammccrdr + 8aammr^3dr - 4c^4r^3dr + 12ccr^5dr - 8r^7dr$) $=$

$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} 16aammqr^4 - 4aammccqrr + pp - 2aammccprr \\ -4aammpr^4 + 2c^4pr^4 - 6ccpr^6 + 4pr^8 - pq \end{array} \right.}{r^3 \times \overline{p-q}^2}$ — sera l'expreſſion des forces centrales cherchées pour cette hypothéſe des tems pris à la la maniére de Kepler dans l'Ellipſe de M. Caſſini. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME V.

Au lieu d'Ellipſe, ſoit le cercle ALB, *tel que l'Excentrique des Anciens, ſur le diamétre* AB *duquel ſoient deux points* C *&* D *également diſtans de ſon centre* F, *& que nous appellerons ſes* foyers, *à cauſe qu'ils nous vont tenir lieu des foyers de l'Ellipſe. Concevons préſentement que les Planetes décrivent ces cercles dans des tems* (t) *qui ſoient comme les angles* ALD *correſpondans aux Arcs* AL *parcourus, ainſi que Sethus Wardus le ſuppoſe : c'eſt-à-dire, de maniére que l'Arc* AE (*décrit du foyer* D *comme centre*) *ſoit* = t, *ou* dt = Ee *compris entre les rayons* DL, Dl, *indéfiniment proches l'un de l'autre. Il s'agit de trouver les efforts ou les peſanteurs de ces Planétes en chaque point* L *de ces Orbes vers le foyer* C *qu'occupe le Soleil, comme fait la Terre dans l'Excentrique des Anciens.* FIG. IV.

SOLUT. Après avoir fait auſſi CL, Cl, indéfiniment proches l'une de l'autre, & l'Arc lh (décrit du centre C) lequel rencontre CL en R; ſoit le rayon FL, avec FG & FO perpendiculaires ſur LC & LD prolongée ; ſoit encore $CL = r$, $Ah = x$, $AL = s$, $Rl = dz$, avec AD ou $BC = b$, $DL = m$ préſentement variable, DF ou $FC = c$, & $AF = a$; d'où réſulte $a = b + c$.

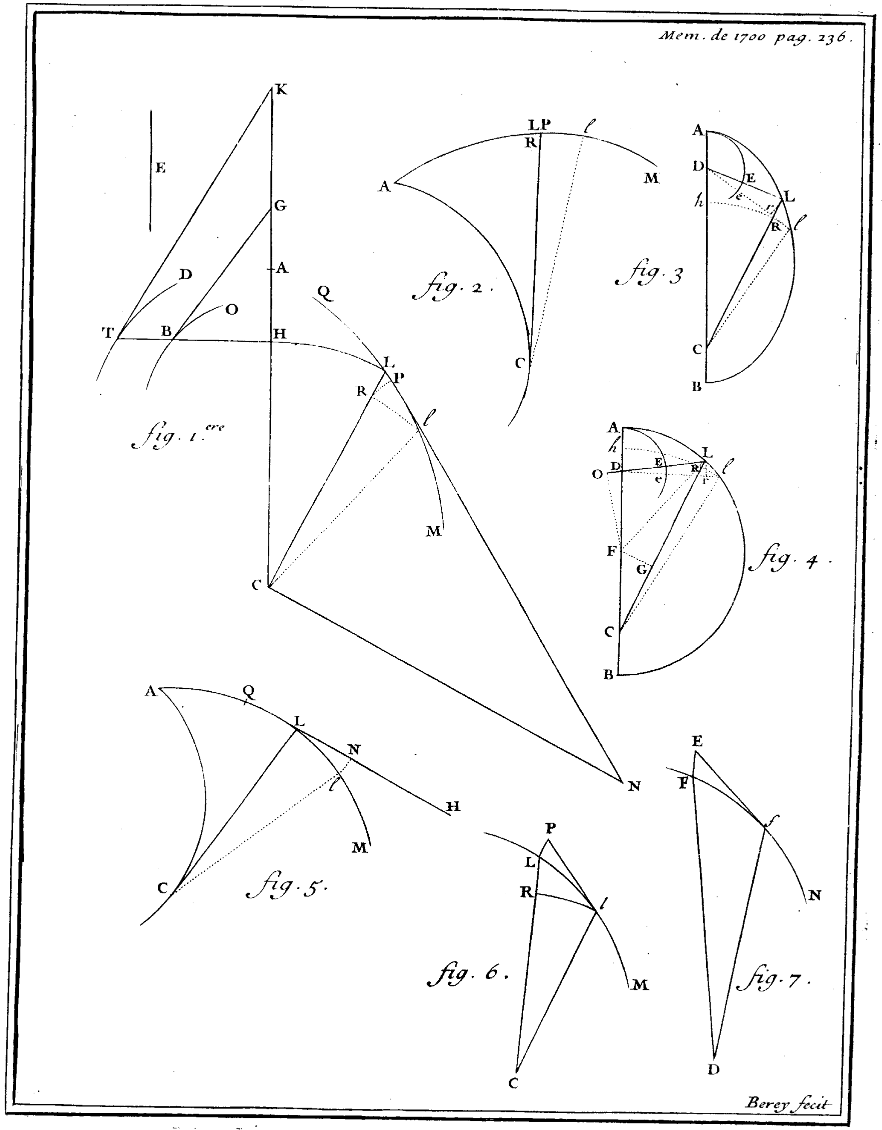
Cela poſé, l'on aura $Ll\ (ds).\ Rl\ (dz) :: FL\ (a).\ LG = \frac{adz}{ds}$. De plus, $Ll\ (ds).\ LR\ (dr) :: FL\ (a).\ FG = \frac{adr}{ds}$. Donc $CG\ (\sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{FG}^2}) = \sqrt{cc - \frac{aadr^2}{ds^2}}$. Donc auſſi $CL\ (r) = \frac{adz}{ds} + \sqrt{\frac{ccds^2 - aadr^2}{ds^2}}$, ou $rds =$

$adz = \sqrt{ccds^2 - aadr^2}$; & en quarrant, $rrds^2 - 2ardsdz = ccds^2 - aadr^2 - aadz^2 = ccds^2 - aads^2$, ou $2ardz = rr + aa - cc \times ds$ (soit $2nn = rr + aa - cc$) $= 2nnds$, ou bien encore $\frac{aarrdz^2}{n^4} = ds^2 = dz^2 + dr^2$: ce qui donne aussi $dz^2 = \frac{n^4 dr^2}{aarr - n^4}$, ou $dr^2 = \frac{aarrdz^2 - n^4 dz^2}{n^4}$.

De plus, les triangles DLF & FLC ayant (*hypoth.*) leurs bases FD & FC égales, il en resultera $rr + mm = 2aa + 2cc$; & en différentiant $rdr + mdm = 0$, c'est-à-dire, $rdr = -mdm$, ou $dm^2 = \frac{rrdr^2}{mm} = \frac{aar^4dz^2 - rrn^4dz^2}{mmn^4}$. Donc (en faisant encore l'Arc Lr du centre D) l'on aura $\overline{Lr}^2$ ($ds^2 - dm^2$) $= \frac{aarrdz^2}{n^4} - \frac{aar^4dz^2 + rrn^4dz^2}{mmn^4} = \frac{aammrr - aar^4 + rrn^4}{mmn^4} \times dz^2$. On a aussi de plus, $\overline{LD}^2$ (mm). $\overline{ED}^2$, ou $\overline{AD}^2$ (bb) :: $\overline{Lr}^2$ $\left(\frac{aammrr - aar^4 + rrn^4}{mmn^4} \times dz^2\right)$. $\overline{Ee}^2$ (dt^2) $= \frac{aabbmmrr - aabbr^4 + bbrrn^4}{m^4 n^4} \times dz^2$.

Cela posé, $ds^2 = \frac{aarrdz^2}{n^4}$ donnera $dsdds = \frac{aanrdrdz^2 + aarrndzddz - 2aarrdndz^2}{n^5}$ (Avert. 2. $ddz = -\frac{drdz}{r}$) $= \frac{-2aarrdndz^2}{n^5}$ (à cause que $2nn = rr + aa - cc$ donne $dn = \frac{rdr}{2n}$) $= -\frac{aar^3drdz^2}{n^6}$ (à cause que Solut. Lem. 2. $dx = -dr$). $= \frac{aar^3dxdz^2}{n^6}$.

Donc $\frac{dsdds}{dxdt^2}$, ou (Reg.) $y = \frac{aar^3dz^2}{n^6dt^2}$ (à cause de la précédente valeur de dt^2) $= \frac{aarm^4}{aabbmmnn - aabbnnrr + bbn^6}$, sera l'expression des forces centrales cherchées, dans laquelle nn est $= \frac{rr + aa - cc}{2}$, & le reste suivant les noms donnés au commencement de cette Solution. *Ce qu'il falloit trouver.*



Berey fecit

PROBLEME VI.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Prob. 5. *si au lieu de prendre les angles* ALD *ou les arcs* AE *pour les mesures des tems* (t) *employés à parcourir les arcs* AL *correspondans, on les mesure à la maniére de Kepler par les espaces ou les aires* ALC $\left(\frac{\int r\,dz}{2}\right)$, *en sorte qu'on prenne* $t = \int r\,dz$, *ou* $dt = r\,dz$: *la question est présentement de sçavoir quels devroient être les efforts ou les pesanteurs de la Planéte* L *vers* C, *pour lui faire ainsi décrire l'Orbe circulaire ou l'Excentrique* ALB. FIG. IV.

SOLUT. Le foyer *D* avec les droites *OL*, *Dl*, *FO*, & les Arcs *AEe*, *Lr*, sont ici inutiles; & sans eux l'on aura (comme dans la Solution précédente du Prob. 5.) $2ardz = rr + aa - cc \times ds$ (soit encore $2nn = rr + aa - cc$) $= 2nnds$. Ce qui donne $\frac{a}{nn} = \frac{ds}{rdz}$ (hyp.) $= \frac{ds}{dt}$, ou $\frac{aa}{n^4} = \frac{ds^2}{dt^2}$; & en faisant dt constante, $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-4aan^3dn}{n^8} = \frac{-4aadn}{n^5}$. Mais ayant (*hyp.*) ci-dessus $2nn = rr + aa - cc$, l'on aura aussi $dn = \frac{rdr}{2n}$. Donc $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-2aardr}{n^6}$ (Solut. Lem. 2.) $= \frac{2aardx}{n^6}$; & par conséquent aussi $\frac{aar}{n^6} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (Reg.) $= y$, ou $y = \frac{aar}{n^6}$ (à cause de $nn = \frac{rr + aa - cc}{2}$) $= \frac{8aar}{\overline{rr + aa - cc}^3}$: c'est-à-dire, que les forces centrales (r) tendantes vers *C*, seront ici comme les fractions $\frac{r}{\overline{rr + aa - cc}^3}$ correspondantes. *Ce qu'il falloit trouver.*

COROL. I. On voit de-là, que si le centre *C* des forces (y) étoit en *B*, ayant alors $c = a$, ou $aa - cc = 0$; ces forces centrales tendantes en *B*, seroient comme les fractions $\frac{1}{r^5}\left(\frac{1}{CL^5}\right)$ correspondantes: c'est-à-dire, en raison réciproque des cinquiémes puissances des rayons *CL*, (alors *BL*) des forces centrales en question.

COROL. II. Mais si le centre de ces forces étoit infiniment éloigné, les grandeurs c & r se trouvant alors infinies, la formule $\frac{r}{rr+aa-cc^3}$ précédente se changeroit ici en $\frac{r}{rr-cc^3}$. Mais en ce cas le point C infiniment éloigné rendant $CG = CF = c$, si l'on suppose $LG = g$, l'on aura aussi $r = g + c$; & par conséquent $rr = gg + 2gc + cc$, ou $rr - cc = gg + 2gc = 2gc$, à cause de c (*hyp.*) infinie par raport à g. Donc en ce cas des forces centrales tendantes vers C infiniment éloigné, suivant LC paralléle à AB, l'on aura aussi ces forces $\left(\frac{r}{rr-cc^3}\right) = \frac{r}{8g^3c^3} = \frac{r}{8c^3 \times LG^3}$: c'est-à-dire, comme les fractions $\frac{1}{LG^3}$ correspondantes, ou en raison réciproque des cubes des ordonnées LG paralléles à AF, à cause que les grandeurs (*hyp.*) infinies c & r rendent constante la fraction $\frac{r}{8c^3}$.

SCHOL. Ces deux Corollaires ont déja été résolus dans le Mémoire du 31. Mars dernier, art. 11. & 19. aussi-bien que par M. Newton. *Lib. 1. Prop. 2. & 3.*

Voilà pour ce qui regarde les différens systêmes du mouvement varié des Planétes sur leurs Orbes: voici présentement pour ceux de leur mouvement uniforme.

PROBLEME VII.

Trouver les forces centrales ou les pesanteurs nécessaires aux Planétes, pour leur faire décrire des Orbes quelconques d'un mouvement uniforme.

FIG. V. SOLUT. On a vû ci-dessus (*Lem. 1. Corol. 2.*) que pour un tel mouvement, les forces centrales ou les pesanteurs de ces Planétes, doivent tendre toutes suivant des perpendiculaires aux Orbes qu'elles décrivent, c'est-à-dire, suivant les rayons correspondans des dévelopées de ces mêmes Orbes. Or un Corps L décrivant une courbe quelconque ALM (s) avec des forces centrales qui tendent toutes ſuivant les rayons correſpondans $LC(r)$ de ſa développée AC, les doit avoir par-tout $= \frac{1}{r}$, c'eſt-à-dire, par-tout en raiſon réciproque de ces rayons correſpondans. Donc, &c.

Pour démontrer cette nouvelle Propoſition, imaginons ſur l'Orbe ALM à décrire, le petit côté $QL = Ll$, lequel prolongé faſſe la tangente LH, & du centre L l'Arc lN, dont le rayon ſoit le petit côté Ll. En ce cas l'on aura les triangles ſemblables LCl, & lLN; Ce qui donnera $LC\ (r).\ Ll\ (ds) :: Ll\ (ds).\ lN = \frac{ds^2}{r}$. Or les eſpaces parcourus par un Corps mû d'une force conſtante & continuellement appliquée, telle qu'on conçoit d'ordinaire la peſanteur, & telle qu'eſt auſſi toute force inſtantanée, étant en raiſon compoſée de cette force & des quarrés des tems employés à les parcourir; l'on aura auſſi $Nl = y\,dt^2$, puiſque NL eſt ce que le Corps L fait d'eſpace en vertu, & ſuivant la direction de la force y dans l'inſtant dt qu'il parcourt Ll. Donc $y\,dt^2 = \frac{ds^2}{r}$, ou $y = \frac{ds^2}{r\,dt^2}$ (Lem. 1. Cor. 2.) $= \frac{1}{r}$: c'eſt-à-dire, que les forces ou les peſanteurs néceſſaires au Corps mû, par exemple, à la Planéte L pour décrire l'Orbe quelconque ALM d'un mouvement uniforme, doivent être en raiſon réciproque des rayons correſpondans (LC) de la développée de cette courbe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Donc quelque nature d'Orbes qu'on faſſe décrire aux Planétes d'un mouvement uniforme, la maniére de trouver les rayons des développées de ces Orbes, fera toujours celle de trouver les forces centrales néceſſaires à ces Planétes pour les leur faire ainſi décrire : c'eſt pour cela que je ne m'y arrêterai pas davantage, cette maniére de déterminer les rayons des développées étant préſentement très-connue, ayant été donnée par M. Bernoulli Profeſſeur à Bâle dans les Actes de Leipſik de 1694. au mois de Juin; par M. le Marquis de l'Hôpital dans l'*Analyſe des Infiniment petits*, *Sect.* 5. & par pluſieurs autres. Il ſuffit de remarquer ici que dans le ſyſtême des Anciens, & de quelques Modernes qui font mouvoir encore d'un mouvement uniforme les Planétes sur des Orbes circulaires ; les pesanteurs ou les forces centrales de ces Planétes doivent être par-tout égales sur chacun d'eux, & tendre toutes au centre de ce cercle, sa développée se réduisant toute en ce point.

Telle est la maniére de trouver les forces centrales ou les pesanteurs des Planétes dans tous les systêmes, tant anciens que modernes. Ce qui est tout ce qu'on s'étoit proposé de démontrer ici.

REMARQUE.

Outre la Regle qui vient de nous servir à déterminer toutes les forces centrales ci-dessus, & dont l'hypothése de rdz constant donne aussi $y = \frac{dz^2 + rddx}{rdt^2}$, ou (Solut. Lem. 2.) $y = \frac{dz^2 - rddr}{rdt^2}$, pour une semblable Regle ; en voici encore quelques autres qui me viennent à l'esprit peu de tems après l'avoir trouvée, & qu'on sera peut-être bien aise de voir encore.

Fig. VI. & VII. Pour cela, soient deux Corps L & F, dont les masses soient m & μ ; les pesanteurs, p & π ; les longueurs des chutes verticales, l & λ ; leurs durées, t & θ ; soient aussi f & φ leurs forces centrales vers C & D, substituées au lieu de leurs pesanteurs en décrivant les courbes MlL & NfF ; PL & EF, les longueurs parcourues en vertu de ces forces à chaque instant ; enfin dt & $d\theta$, ces mêmes instans : voici le tout dans l'ordre suivant.

Corps mûs	L,	F.
Leurs masses	m,	μ.
Leurs pesanteurs	p,	π.
Longueurs de leurs chutes verticales . .	l,	λ.
Tems des chutes	t,	θ.
Leurs forces centrales vers C & D, en décrivant les courbes MlL & NfF .	f,	φ.
Longueurs parcourues en vertu de ces forces à chaque instant	PL,	EF.
Ces mêmes instans	dt,	$d\theta$.

Il

Il ſuit de ce que j'ai démontré dans les Mémoires de l'Académie de 1693. pag. 111. touchant la chute des Corps, qu'en prenant avec Galilée, les peſanteurs pour conſtantes, l'on auroit toujours $m\,l\,\pi\,\theta^2 - \mu\,\lambda\,p\,t^2$. Et comme les hauteurs & les tems ſont ici variables, il s'enſuit que cela ſera encore vrai des hauteurs indéfiniment petites, telles que dl, $d\lambda$, & des inſtans, dt & $d\theta$, pendant leſquels ces petites hauteurs ſeroient parcourues en vertu des peſanteurs p & π, ces peſanteurs ne fuſſent-elles conſtantes que dans ces inſtans : il s'enſuit, dis-je, que l'on auroit auſſi pour lors $m\,\pi\,dl\,d\theta^2 = \mu\,p\,d\lambda\,dt^2$.

Mais ſi l'on conſidére que dans les courbes regardées comme polygones, les forces centrales inſtantanées ſont toujours uniformes & conſtantes dans chaque inſtant, quelque variables qu'elles ſoient d'ailleurs dans des tems finis ; l'augmentation ou la diminution infiniment petite qui s'en fait à chaque inſtant ; étant nulle par rapport à elles, on verra que les longueurs PL & EF (paralléles à lC & à fD) dont les Corps L & F, qu'on ſuppoſe préſentement décrire les courbes MlL & NfF, ſeroient détournés des tangentes lP & fE vers ces courbes en vertu de leurs forces centrales f & φ (tendantes en C & en D) pendant les inſtans dt & $d\theta$ que ces Corps parcourent les élémens lL & fF de ces mêmes courbes : on verra, dis-je, que ces longueurs PL & EF ſeroient comme parcourues par ces Corps en vertu de peſanteurs conſtantes & uniformes, telles que ſeroit alors chacune de ces forces dans chaque inſtant. Donc en prenant préſentement ces forces au lieu des peſanteurs de ces Corps : c'eſt-à-dire, f, φ, au lieu de p, π ; & PL, EF, au lieu de dl, $d\lambda$; l'on aura encore de même cette Regle générale $PL \times m\varphi\,d\theta^2 = EF \times \mu f\,dt^2$, ou $\frac{f\,dt^2}{PL \times m} = \frac{\varphi\,d\theta^2}{EF \times \mu}$, de laquelle on voit aſſez les uſages par rapport aux comparaiſons qu'on voudroit faire des forces centrales des Corps mûs en lignes courbes quelconques, de leurs maſſes, &c. Voici donc ſeulement ce qu'elle m'en a encore donné d'autres, en faisant $\frac{\varphi d\theta^2}{EF \times \mu} = 1$, & selon celui des Elémens lR décrit du centre C, LR, & Ll, qu'on prendra pour constant dans la courbe MlL.

FIG. VI.

En effet en faisant ainsi $\frac{\varphi d\theta^2}{EF \times \mu} = 1$, la Regle précédente $\frac{fdt^2}{PL \times m} = \frac{\varphi d\theta^2}{EF \times \mu}$ donnera aussi $\frac{fdt^2}{PL \times m} = 1$, c'est-à-dire, $f = \frac{PL \times m}{dt^2}$, ou $f = \frac{PL}{dt^2}$, à cause de m (*hyp.*) constante. Ce qui suit encore immédiatement de ce que les espaces (PL) parcourus en vertu des forces constantes & continuellement appliquées, telles que la force f à chaque instant, sont toujours comme les produits (fdt^2) de ces forces par les quarrés des tems de leur application : c'est-à-dire ici, PL comme fdt^2, ou $PL = fdt^2$, ou bien encore $f = \frac{PL}{dt^2}$.

Mais suivant les noms ci-dessus, Sol. Lem. 2. où l'on a appellé CL ou Cl, r; lR, dz; & Ll, ds; on trouvera

1°. En faisant dz (lR) constante, $PL = \begin{cases} \frac{ds^2 - rddr}{r}. \\ \frac{drds^2 - rdsdds}{rdr}. \end{cases}$

2°. En faisant dr (LR) constante, $PL = \begin{cases} \frac{dzds^2 + rdrddz}{rdz}. \\ \frac{dz^2 ds^2 + rdrdsdds}{rdz^2}. \end{cases}$

3°. En faisant ds (Ll) constante, $PL = \begin{cases} \frac{dz^2 ds^2 - rds^2 ddr}{rdz^2}. \\ \frac{dzdrds^2 + rds^2 ddz}{rdrdz}. \end{cases}$

Donc en substituant toutes ces valeurs de PL successivement $f = \frac{PL}{dt^2}$, l'on aura de même,

1°. En faisant dz constante, $f = \begin{cases} \frac{ds^2 - rddr}{rdt^2}. \\ \frac{drds^2 - rdsdds}{rdrdt^2}. \end{cases}$

2°. En faisant dr constante, $f = \begin{cases} \frac{dzds^2 + rdrddz}{rdzdt^2}. \\ \frac{dz^2 ds^2 + rdrdsdds}{rdz^2 dt^2}. \end{cases}$

3°. En faisant ds constante, $f = \begin{cases} \dfrac{dz^2 ds^2 - rds^2 ddr}{rdz^2 dt^2}. \\ \dfrac{dzdrds^2 + rds^2 ddz}{rdrdzdt^2}. \end{cases}$

Ce sont encore là six Regles, qui en y prenant ainsi dz, ou dr, ou ds pour constantes, donneront les mêmes forces centrales que celles qui se tirent de la Regle dont on s'est servi par-tout ci-dessus, en y prenant de même rdz pour constante, & y pour les forces que l'on appelle ici f: l'Essai en est aisé à faire ; ainsi ne nous y arrêterons-nous pas davantage, non plus qu'aux cas des ordonnées LC, lC, &c. paralléles entre elles, dont les Regles sont celles-ci mêmes mutilées seulement chacune du premier terme du Numerateur de sa Fraction. Tout cela, dis-je, est trop clair pour s'y arrêter davantage.

AVIS.

Au reste, je crois devoir avertir que dans l'Art. 15. du premier des Mémoires de l'Académie de 1699. pag. 9. en citant M. Leibnitz & M. (Jean) Bernoulli, Professeur à Groningue, pour avoir trouvé la même équation que j'y donne de l'Isochrone Paracentrique, j'ai oublié d'y citer de même M. (Jacques) Bernoulli, Professeur à Bâle, lequel outre la construction qu'il a donnée de cette courbe au mois de Septembre des Actes de Leipsic de 1694. en avoit aussi donné au mois de Juin de ces mêmes Actes, la derniére équation de l'art. 16. de ce Mémoire, avec une maniére d'en démêler les variables, laquelle réduit cette équation à la précédente, ainsi qu'on l'y voit réduite dans l'art. 17. de ce même Mémoire.