Il se peut faire que cette différence vienne de la hauteur de l'air, qui est plus grande à Londres qu'à Boulogne qui est plus élevée sur la surface de la Mer. L'air de Londres qui paroît un peu plus grossier qu'à Boulogne, peut aussi contribuer à augmenter la puissance réfractive de l'air.

Par l'examen des Réfractions observées à Torneo en Bothnie, le Sinus de l'inclination dans l'Ether, est au Sinus de l'inclination dans l'air, comme 100000 à 100045, & par conséquent la puissance réfractive qui résulte de ces Réfractions, est de 45.

Si l'on peut compter sur cette expérience qui a été faite en Angleterre, cela servira à confirmer que les Réfractions de l'air sont plus grandes, plus l'on approche du Pole, puisqu'à Boulogne, qui est à $44^d. 30'$ de hauteur, la puissance réfractive est de $28\frac{4}{5}$; à Londres, dont la hauteur est de $51^d. 30'$, elle est de 36; & à Torneo, dont la hauteur est de $65^d. 40'$, elle est de 45. Cela n'est pas précisément à proportion des différences des hauteurs du Pole; car par les Observations faites à la Cayenne, la puissance réfractive résulte de près de 27, peu différente de celle de Boulogne, que l'on a trouvée de $28\frac{4}{16}$.

DU MOUVEMENT EN GENERAL par toutes sortes de Courbes; & des Forces Centrales, tant Centrifuges, que Centripetes, nécessaires aux Corps qui les décrivent.

PAR M. VARIGNON.

LE 30. Janvier dernier, je donnai une maniére générale de déterminer les forces, les vîtesses, les espaces, & les tems, une seule de ces quatre choses, ou plutôt un seul rapport de deux d'entre elles prises à discrétion, étant donné dans toutes sortes de mouvemens rectilignes variés comme l'on voudra. Voici présentement & de la 1700. 31. Mars.

même maniére pour toutes fortes de mouvemens en lignes courbes : c'eft-à-dire, beaucoup plus généralement encore ; puifque tout ce qui regarde les mouvemens en lignes droites, s'en déduit. Il en réfulte auffi une formule très-fimple des *Forces Centrales*, tant centrifuges, que centripetes, lefquelles font le principal fondement de l'excellent Ouvrage de M. Newton. *De Phil. natur. Princ. Mathem.* Mais la briéveté de Mémoire ne me permettant pas de m'étendre ici autant qu'il faudroit fur les ufages de cette Régle pour la découverte des pefanteurs des Planétes, j'en referverai la recherche pour une autre fois, me contentant de faire voir ici avec quelle facilité elle expédie les exemples que voici, dont la plûpart font de M. Newton ; fçavoir ceux des Prop. 7, 8, 9, 10, de fon premier Livre, lefquels font compris dans les Art. 11, 19, 12, 9, ci-après. J'en ai retranché celui des forces centrales tendantes au foyer des fections coniques, pour le Mémoire de la pefanteur des Planétes, dont il doit faire partie.

FIG. I. I. Soient donc encore toutes chofes les mêmes, que dans le Mémoire du 30. Janvier dernier, c'eft-à-dire, les noms les mêmes, & tous les angles rectilignes (qu'on voit ici) droits, excepté les angles en C. Mais au lieu de concevoir le Corps mû de A en H par la droite AH, imaginons-le fe mouvoir de EG en L le long de la courbe QL dont les ordonnées foient les Arcs circulaires HL décrits du centre C, & les abfciffes AH : en forte qu'au lieu de fix courbes qu'il y avoit dans le Mémoire précédent, il y en ait préfentement ici fept, fçavoir QL, TD, VB, FM, VK, FN, FO, dont la premiére QL exprime par fa longueur (depuis EG jufqu'en L) l'efpace parcouru. Soit de même le tems employé à le parcourir, exprimé par l'ordonnée correfpondante HT de la courbe TD ; la vîteffe du Corps mû (en chaque point L) par les ordonnées auffi correfpondantes & égales VH, VG des courbes VB, VK ; fa force centrale en L, c'eft-à-dire, ce qu'il a de force abfolue en L, vers le centre C, par les ordonnées correfpondantes encore & égales FH, FG, FE, des Courbes FM, FN, FO.

C'eſt pour cela que ces Courbes s'appelleront encore comme dans le Mémoire du 30. Janvier dernier : ſçavoir, DT, la *Courbe des Tems*; VB, VK, les *Courbes des Vîteſſes*; FM, FN, FO, les *Courbes des Forces*; & de plus QL, la *Courbe des Chemins*.

II. Soient encore auſſi $AH=x$, les Tems $HT=AG=t$, les Vîteſſes $HV=AE=GV=v$, & les Forces centrales abſolues $HF=EF=GF=y$. Soit de plus l'Eſpace parcouru $QL=s$, $AC=a$, $CH=r$, & $Rl=dz$. L'on aura de-là ds pour l'eſpace parcouru d'une vîteſſe uniforme v, à chaque inſtant; dv pour l'accroiſſement de vîteſſe qui s'y fait; dds pour ce qui ſe parcourt alors d'eſpace en vertu de cet accroiſſement de vîteſſe; & dt pour cet inſtant. L'on aura auſſi $a=x+r$; ce qui donne $dx=-dr$ en différenciant le tout poſitivement.

III. A ce compte la vîteſſe ne conſiſtant que dans un rapport d'eſpace parcouru d'un mouvement uniforme, au tems employé à le parcourir, l'on aura déja $v=\frac{ds}{dt}$ pour une premiére Regle, laquelle donnera $dv=\frac{dds}{dt}$, en faiſant dt conſtante.

IV. De plus, ſi l'on imagine deux Arcs HL, hl indéfiniment proches l'un de l'autre, avec leurs rayons CL, Cl, dont le premier CL, rencontre hl en R; & que de ce point R l'on imagine auſſi RP perpendiculaire ſur Ll; on trouvera que la force abſolue $HF\,(y)$ en L vers C, étant à ce que le Corps mû en reçoit d'elle ſuivant $Ll :: LR.LP :: Ll\,(ds).LR\,(dx)$. Cette force ſuivant Ll ſera $=\frac{ydx}{ds}$. Or les eſpaces parcourus par un Corps mû avec des forces conſtantes, & continuellement appliquées, telles qu'on conçoit d'ordinaire la peſanteur, étant en raiſon compoſée de ces forces & des tems employés à les parcourir, l'on aura auſſi $dds=\frac{ydx}{ds}\times dt^2$. Donc $y=\frac{dsdds}{dxdt^2}\left(\frac{vdv}{dx}\right)$; ce qui fait encore une Regle, qui ajoutée à celle de l'Art. 3. ſatisfait à tout ce qu'on se propose ici de résoudre, soit que les ordonnées HL soient droites ou circulaires; puisque la distance du centre C n'entre point dans cette Regle.

REGLES GENERALES
DES MOUVEMENS EN LIGNES COURBES.

$$1^{\circ}.\ v = \frac{ds}{dt}$$

$$2^{\circ}.\ y = \frac{ds\,dds}{dx\,dt^2}\left(\frac{v\,dv}{dx}\right).$$

V. Quant à l'usage de ces deux Regles, je dis présentement que des sept courbes marquées ci-dessus, deux quelconques, c'est-à-dire, les équations de deux prises à discrétion, étant données, l'on pourra toujours trouver les cinq autres, supposé les intégrations requises, & la résolution des égalités qui s'y pourroient rencontrer.

VI. La preuve de cette Proposition est facile. Car si l'on a, par exemple, les équations des Courbes des Chemins & des tems, QL, & DT.

1°. La premiére de ces équations donnera les ds, & la seconde les dt, en x (j'y comprends aussi les dx) & en constantes; & ces valeurs de ds & de dt, substituées dans la premiére des Regles générales, la changeront en une équation, où il n'y aura plus que v & x de variables, & qui par conséquent sera celle de la courbe des vîtesses VB. Et là il est à remarquer que n'y ayant ici (*hyp.*) aucun obstacle, ni autre force que la centrale, & le mouvement du Corps L une fois commencé, suivant une direction à angle quelconque avec celle de cette force; l'on aura par-tout ici suivant M. Newton (*Phil. nat. Princ. Math. Lib.* 1. *Sect.* 2. *Th.* 1.) les dt comme les $r\,dz$, ou $dt = r\,dz$. De sorte qu'une seule de ces équations des courbes QL & DT, sera même ici capable de donner l'autre avec celle de la courbe VB.

2°. Cette équation de la courbe VB avec celle de DT, donnant aussi x, en v, en t, & en constantes; il en résultera encore une autre, dans laquelle il n'y aura plus que des v, des t, & des constantes; & qui sera par conséquent celle de l'autre courbe des vîtesses VK.

3°. Ayant ainsi les équations des courbes QL, DT, VK, l'on aura aussi les valeurs de ds, dt, dv, en x, en dx, & en constantes; lesquelles valeurs substituées dans la seconde Regle générale, en feront une équation où il n'y aura plus que y & x de variables; & qui par conséquent sera celle de la courbe des forces FM.

4°. Cette équation de la courbe FM, & la donnée de la courbe DT, donneront aussi x, en y, en t, & en constantes; d'où résultera encore une équation, laquelle n'ayant plus que y & t de variables, sera celle d'une autre courbe des forces FN.

5°. Enfin les équations trouvées de FM & de VB, donneront de même x, en y, en v, & en constantes; d'où il en résultera aussi une, laquelle n'ayant plus que v & y de variables, sera celle de la troisiéme courbe des forces FO, qui étoit la derniére à trouver.

VII. Si au lieu des courbes QL & DT, l'on en donnoit deux autres quelconques, par exemple VB, NF, c'est-à-dire, leurs équations.

1°. Ces deux équations donneroient v en x, ou x en v, & y en t, (j'y comprends aussi les différentielles & les constantes), lesquelles valeurs de v & de y, substituées dans $ydx = vdv$, que donne la comparaison des deux Regles générales, en feront une équation, laquelle n'ayant plus que x & t de variables, sera celle de la courbe TD. Et si l'on substitue seulement la valeur de v en x, dans l'équation $ydx = vdv$; elle deviendra celle de la courbe FM. De même, si l'on y substitue la valeur de x en v, & de y en t, cette équation deviendra celle de la courbe VK.

2°. Ayant ainsi les équations des courbes VB, DT, FM, l'on aura aussi des valeurs de v, t, & y, en x & en constantes, lesquelles valeurs substituées dans la seconde Regle générale, en feront une équation, laquelle n'ayant plus que x & s de variables, sera celle de la courbe QL, en substituant $a - r$ (*art.* 2.) à la place de x.

3°. Il ne reste plus que la courbe FO, laquelle se trouvera de même que ci-dessus (*n.* 5. *art.* 6.) Il est visible que la même chose arrivera, quelques autres qu'on donne de ces Courbes, deux à deux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

VIII. Cette démonstration fait assez voir tous les différens usages qu'on peut faire des Regles précédentes. Mais la briéveté de Mémoire ne me permettant pas d'entrer dans un si grand détail, je ne toucherai presque qu'à ce qui concerne les forces centrales que M. Newton & M. Leibnitz ont rendues si célébres par les applications qu'ils en ont faites aux Planétes, pour en découvrir les pesanteurs par rapport au Soleil dans l'hypothése de Kepler : encore la seconde de ces Regles suffira-t-elle pour cela, ainsi qu'on le va voir dans les exemples suivans par la conformité de mes solutions avec celles de M. Newton dans ceux qui nous seront communs. Quant à l'exemple de M. Leibnitz, étant d'Astronomie, ce sera pour une autre fois.

Des Forces Centrales tendantes à un même Point.

FIG. II. IX. *Exemple* 1. SOIT l'Ellipse ordinaire ALB, dont C soit le centre auquel tendent toutes les forces ou pesanteurs du Corps L qui la décrit. Pour les trouver, soient encore $CL = r$, l'Arc $Rl = dz$ décrit du centre C, $AH = x$, $AL = s$; soient de plus son grand Axe $AB = 2a$, & son paramétre $= p$.

La nature de cette Ellipse donnera $dz = \frac{aapdr}{\sqrt{\overline{2arr - aap} \times \overline{aap - prr}}}$ pour son équation au centre, laquelle donnera $ds^2 = (dz^2 + dr^2) = \frac{2a^3prr - 2apr^4 + aapprr}{\overline{2arr - aap} \times \overline{aap - prr}} \times dr^2$. Donc $\frac{ds^2}{dz^2} = \frac{2aarr - 2r^4 + aprr}{a^3p}$, ou $\frac{2aa - 2rr + ap}{a^3p} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (*n.* 1. *art.* 6.) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Et par conséquent aussi, en faisant dt constante, $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-4rdr}{a^3p}$ (*art.* 2.) $= \frac{4rdx}{a^3p}$, ou $\frac{a^3p}{2r} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (*art.* 4. *Reg.* 2.) $= y$. Donc les forces ou les pesanteurs (y) tendantes au centre C de l'Ellipse, sont comme les distances CL (r) de ce centre au Corps L qui la décrit, ou comme les diamétres correspondans de cette Ellipse. D'où l'on voit

voit auſſi que la ligne des forces FM (*Fig. 1.*) doit être ici (*Fig. 2.*) une ligne droite MO, laquelle prolongée paſſera par le centre C.

X. La même choſe ſe trouvera pour la Parabole, en ſuppoſant a infinie; & par ce moyen CL (r) infinie auſſi, & paralléle à ſon Axe AB. D'où l'on voit que les forces centrales ſeront ici toutes égales; & qu'ainſi en prenant pour telle la peſanteur des corps, c'eſt-à-dire, pour conſtante, & ſuivant des directions paralléles, leur courbe de projection devroit être une Parabole dans le vuide, ou dans un milieu (s'il étoit poſſible) qui ne retardât ni augmentât leur mouvement, ainſi que l'a trouvé Galilée. Quant à l'hyperbole, le ſeul changement des Signes négatifs de l'équation au centre de l'Ellipſe dans l'article précédent, lui en fera auſſi une au centre $\left(dz = \frac{aapdr}{\sqrt{2arr + aap \times aap + prr}}\right)$, laquelle donnera de même $y = \frac{-2r}{a^3 p}$, c'eſt-à-dire, encore les forces centrales comme les diamétres correſpondans; mais au lieu de centripétes qu'elles étoient ci-deſſus, elles ſeront ici centrifuges.

XI. *Exemple 2.* Soit le demi-cercle ALC: on demande quelles forces centrales tendantes au point C, ſont néceſſaires au corps L pour lui faire décrire ce demi-cercle. Soient encore CL ou $Cl = r$, & $AC = a$. Si l'on fait les droites AL, Al; l'on aura $AL = \sqrt{aa - rr}$, & $\frac{-rdr}{\sqrt{aa-rr}} = Rl$ (*art.* 2.) $= dz$, ou $\frac{dz\sqrt{aa-rr}}{r} = -dr$. Donc $\frac{aa-rr}{rr} \times dz^2 + dz^2 = dr^2 + dz^2 = ds^2$; ce qui donne $\frac{ds^2}{dz^2} = \frac{aa-rr}{rr} + 1 = \frac{aa}{rr}$, ou $\frac{aa}{r^4} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (*n. 1. art. 6.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Ainſi en faiſant dt conſtante, l'on aura $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-4aar^3dr}{r^8}$ (*art.* 2.) $= \frac{4aadx}{r^5}$, ou $\frac{2aa}{r^5} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (*art. 4. Reg.* 2.) $= y$: c'eſt-à-dire, que les forces centrales tendantes au point C, ſont ici en raiſon réciproque des cinquiémes puiſ- FIG. III.

ſances de leurs rayons CL. D'où l'on voit auſſi que la ligne des forces FM (*Fig.* 1.) doit être ici (*Fig.* 3.) une hyperbole du cinquiéme degré entre les Aſymptotes orthogonales AC, CO, dont le lieu ſera $yr^5 = 2a^6$, en prenant a pour l'unité, & r (CH) pour ſes abſciſſes.

FIG. IV. XII. *Exemple* 3. Soit la Spirale Logarithmique QL, dont le centre ſoit C, auquel tendent les forces ou peſanteurs du corps L qui la décrit. Pour les trouver, ſoient toutes choſes comme ci-deſſus (*art.* 2.) La nature de cette Spirale donnera $Rl (dz). Ll (ds) :: a. b.$ ou $\frac{ds}{dz} = \frac{b}{a}$, ou bien encore $\frac{bb}{aarr} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (*n.* 1. *art.* 6.) $= \frac{ds^2}{dt^2}$; & en faiſant dt conſtante, $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-2bbrdr}{aar^4}$ (*art.* 2.) $= \frac{2bbdx}{aar^3}$, ou $\frac{bb}{aar^3} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ $=$ (*art.* 4. *Reg.* 2.) $= y$: c'eſt-à-dire, que les forces centrales tendantes au centre C de la Spirale Logarithmique, ſont en raiſon réciproque des cubes de ſes ordonnées (CL) correſpondantes. D'où l'on voit auſſi que la ligne des forces FM (*Fig.* 1.) doit être ici de même une hyperbole cubique entre des Aſymptotes orthogonales au centre C, une deſquelles ſoit AC; puiſque ſon lieu eſt $yr^3 = aabb$, en prenant encore ici a pour l'unité, & r (CH) pour les abſciſſes de cette hyperbole.

FIG. V. XIII. *Exemple* 4. Il eſt à remarquer que ce même rapport de forces ſe trouve auſſi dans la premiere Spirale hyperbolique. Mais pour les trouver en général pour toutes ſortes de Spirales, tant paraboliques que hyperboliques, ſoit $CLDL$ une Spirale de tous les genres (j'en ai encore une infiniment plus univerſelle; mais il ſeroit trop long de l'expliquer ici), dont C ſoit le centre, auſſi-bien que de l'arc hlR, & du cercle $DEFD$ répondant à telle revolution qu'on voudra de cette Spirale. Toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus (*art.* 2.), ſçavoir les rayons des forces $CL = r$, l'indéfinie $Ah = x$, $Ll = ds$, & $Rl = dz$; ſoit de plus la circonférence $DEFD = c$, & ſon rayon CD ou $CE = a$.

L'on aura la ſomme des Ee ($\int Ee$) pour les abſciſſes de cette circonférence depuis le commencement des revolutions ; ce qui donnera $c. \int Ee :: a^m. r^m.$ ou $cr^m = a^m. \times \int Ee$ pour l'équation de ces Spirales en général. Donc $mcr^{m-1} dr = a^m \times Ee$. Mais $Cl(r). Ce(a) :: Rl(dz)$. $Ee = \frac{adz}{r}$. Donc auſſi $mcr^{m-1} dr = \frac{a^{m+1} dz}{r}$, ou $\frac{a^{m+1} dz}{mcr^m} = dr$; ce qui donne $\frac{a^{2m+2} \times dz^2}{mmccr^{2m}} + dz^2 = dr^2 + dz^2 = ds^2$, ou $\frac{a^{2m+2}}{mmccr^{2m+2}} + \frac{1}{rr} = \frac{ds^2}{rrdz^2}$ (*n. 1. art. 6.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$; & en faiſant dt conſtante, $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{\overline{-2m-2} \times a^{2m+2} r^{2m+1} dr}{mmccr^{4m+4}} - \frac{2rdr}{r^4}$ (*art.* 2.) $\frac{\overline{2m+2} \times a^{2m+2} + 2mmccr^{2m}}{mmccr^{2m+3}} \times dx$, ou bien encore $\frac{\overline{m+1} \times a^{2m+2} + mmccr^{2m}}{mmccr^{2m+3}} = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (*art. 4. Reg.* 2.) $= y$: c'eſt-à-dire en général, que les forces centrales tendantes au centre C de tous les genres de Spirales (tant paraboliques que hyperboliques) doivent être dans toutes, comme ces fractions correſpondantes. D'où l'on voit auſſi que le lieu de la courbe des forces FM (*Fig.* 1.) ſera ici $y = \frac{\overline{m+1} \times a^{2m+6} + mma^4ccr^{2m}}{mmccr^{2m+3}}$, en prenant encore $a = 1$, & r (CH) pour les abſciſſes de cette courbe.

XIV. On voit de-là que la Spirale d'Archiméde ayant $m = 1$, les forces centrales tendantes à ſon centre C, y doivent être comme les fractions correſpondantes $\frac{2a^4 + ccrr}{ccr^5}$.

XV. Au contraire la premiére Spirale hyperbolique ayant $m = 1$, elle aura $y = \frac{ccr^{-2}}{ccr} = \frac{1}{r^3}$; c'eſt-à-dire, que cette Spirale aura ſes forces centrales tendantes au point C, en raiſon réciproque des cubes de leurs rayons, de même que la Spirale Logarithmique (*art.* 12.) ainſi qu'on le vient d'avancer au commencement de cet Exemple.

XVI. Voilà, ce me ſemble, aſſez d'Exemples des forces centrales tendantes à un même point : voyons auſſi quelque chose de celles qui tendent suivant des directions paralléles.

Des Forces Centrales tendantes suivant des Directions paralléles.

XVII. Puisque (*n. 1. art. 6.*) dans tout ceci les espaces $LCl\left(\frac{raz}{2}\right)$ sont comme les dt, ce cas des directions paralléles rendant $LC(r)$ infinie, & par ainsi constante, l'on aura aussi dans ce même cas les dz comme les dt, ou $dz = dt$. Cela posé,

XVIII. *Exemple 5.* Soit l'Ellipse ALB décrite par un
FIG. VI. Corps L, dont les forces centrales ou pesanteurs tendent suivant LC paralléles à celui qu'on voudra de ses Axes AB, dont E soit le milieu, ou le centre de l'Ellipse.

Les noms demeurant les mêmes que ci-dessus (*art.* 2.) cette Ellipse aura ses ordonnées $HL = z$, ses abscisses $AH = x$, ses arcs $AL = s$, $LR = dx\,(-dr)$: de sorte qu'en prenant son axe $AB = 2a$, & son paramétre $= p$, son lieu sera $z = \sqrt{\frac{2apx - pxx}{2a}}$, lequel différentié donnera $dz = \frac{apdx - pxdx}{\sqrt{4aapx - 2apxx}}$, ou $\frac{dz\sqrt{4aapx - 2apxx}}{ap - px} = dx$; & par conséquent aussi $\frac{4aapx - 2apxx}{\overline{ap - xp}^2} \times dz^2 + dz^2 = dx^2 + dz^2 = ds^2$, ou $\frac{4aax - 2axx}{p \times \overline{a - x}^2} + 1 = \frac{ds^2}{dz^2}$ (*art. 17.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Donc en prenant dt pour constante, l'on aura $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{4a^3dx}{p \times \overline{a - x}^3}$ à la fin de la différentiation réduite, ou bien $\frac{2a^3}{p \times \overline{a - x}^3}\left(\frac{2a^3}{p \times \overline{LG}^3}\right) = \frac{dsdds}{dxdt^2}$ (*art. 4. Reg. 2.*) $= y$: c'est-à-dire, que les forces centrales suivant LC, seront ici comme les $\frac{1}{LG^3}$, ou en raison réciproque des cubes des ordonnées (LG) à l'autre axe ED de l'Ellipse proposée. D'où l'on voit aussi que la courbe des forces FM (*Fig. 1.*) fera ici (*Fig. 6.*) une hyperbole cubique entre les Asymptotes orthogonales AE, EO, dont le lieu sera $FH \times \overline{HE}^3 = \frac{2a^5}{p}$, en prenant $a = 1$.

XIX. Le même rapport de forces se trouvera de même pour le cercle, en faisant ici $p = 2a$ dans le lieu de l'Ellipse ; & pour l'Hyperbole, en rendant tous les Signes de ce lieu positifs. Mais a étant infinie dans la Parabole, la valeur précédente $\left(\frac{2a^3}{p \times \overline{a - x}^3}\right)$ des forces centrales, lui vient $= \frac{2a^3}{pa^3} = \frac{2}{p}$, c'est-à-dire constante, ainsi qu'on l'a déja trouvé dans l'art. 10. Voici encore ces mêmes forces en deux mots pour cette premiére Parabole, parmi celles de tous les genres de Paraboles, & d'Hyperboles entre Asymptotes.

XX. *Exemple 6.* Les noms & le reste demeurant toujours les mêmes dans la Figure 7. soit $z^m = x$, le lieu de toutes les Paraboles NL, & des Hyperboles entre Asymptotes à l'infini. L'on aura $mz^{m-1}dz = dx$, & $mmz^{2m-2}dz^2 + dz^2 = dx^2 + dz^2 = ds^2$, ou $\overline{mmz^{2m-2} + 1} = \frac{ds^2}{dz^2}$ (*art. 17.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$; & en faisant dt constante, $\frac{2ds\,dds}{dt^2} = \overline{2m-2} \times mmz^{2m-3}dz$ (à cause de $mz^{m-1}dz = dx$) $= \overline{2m-2} \times mz^{m-2}dx$. Donc $\overline{mm-m} \times z^{m-2} = \frac{ds\,dds}{dx\,dt^2}$ (*art. 4. Reg. 2.*) $= y$: c'est-à-dire, que les forces centrales suivant LC paralléles à l'axe AC, sont dans tous ces genres de Paraboles & d'Hyperboles, comme les z^{m-2} correspondantes. D'où l'on voit aussi que $y = \overline{mm-m} \times z^{m-2}$ (à cause de $x = z^m$) $= \overline{mm-m} \times x^{\frac{m-2}{m}}$ sera ici le lieu de la Courbe des forces FM. FIG. VII.

XXI. D'où l'on voit encore comme ci-dessus (*art. 10. & 19*) que dans la Parabole ordinaire, qui a $m = 2$, les forces centrales (y) ainsi dirigées, sont par-tout constantes & uniformes ; & que par conséquent la courbe des forces FM, s'y changera en une ligne droite paralléle à l'axe AC.

XXII. On trouvera de même dans la Cycloïde ordinaire, verticalement élevée sur sa base, que les forces centrales tendantes vers cette base, suivant des directions pareillement verticales ou paralléles à son Axe, sont en raison réciproque des quarrés des distances de cette même base au corps qui décrit cette courbe. Mais en voilà assez pour faire sentir l'usage de la seconde des deux Regles précédentes (*art. 4.*) dans la recherche des forces centrales nécessaires pour la description de toutes sortes de courbes tant Géométriques, que Méchaniques, dans les Corps qui les décrivent. D'ailleurs la briéveté de Mémoire ne me permet pas d'entrer ici dans un plus grand détail. C'est aussi pour cela que je n'y ajoûterai touchant l'usage de la premiére de ces Regles, que ce qu'elle me fournit tout présentement du rapport des tems des chutes des Corps de pesanteur constante, & de directions paralléles le long de cette Cycloïde renversée, de maniére que ces directions soient toutes paralléles à son Axe; & cela à cause de la simplicité d'une nouvelle démonstration de leurs mouvemens isochrones, qu'on va voir en résulter, & de la facilité avec laquelle la courbe synchrone de M. Bernoulli de Groningue s'en déduit aussi.

FIG. VIII. XXIII. *Exemple* 7. Soit donc à l'ordinaire un corps de pesanteur constante, & de directions paralléles à l'Axe vertical SQ de la Cycloïde renversée GLQ, dont le cercle générateur soit $SFXQ$, & le long de laquelle ce corps tombe de L en L, l'un & l'autre de ces points étant pris à discrétion. Suivant cette hypothése de Galilée, la courbe AV des vîtesses sera une Parabole dont le lieu $v=\sqrt{x}$ exprimera par ses ordonnées v (VH) les vîtesses de ce corps à chaque point correspondant L de cette Cycloïde. On demande la courbe ATD des tems employés à tomber d'un point quelconque K jusqu'au fond Q de cette Cycloïde, cette chute commençant en K.

Soient donc encore, comme dans l'art. 2. $AH=x$, $HT=t$, & $HL=z$, $QL=s$; soient de plus $AQ=a$, $SQ=2b$; & $HQ(a-x)=m$ variable. Cela posé, l'on aura $HX\sqrt{2bm-mm}$, & l'Arc $QX=\int\frac{bdm}{\sqrt{2bm-mm}}$; &

par conséquent $z\,(HL) = \sqrt{2bm - mm} + \int \frac{b\,dm}{\sqrt{2bm - mm}}$. D'où résulte $dz = \frac{2b\,dm - m\,dm}{\sqrt{2bm - mm}} = dm\sqrt{\frac{2b - m}{m}}$, & $dz^2 = \frac{2b - m}{m} \times dm^2$ (à cause de $m = a - x$) $= \frac{2b - a + x}{a - x} \times dx^2$; ce qui donne $ds\,(\sqrt{dz^2 + dx^2}) = \sqrt{\frac{2b - a + x}{a - x} \times dx^2 + dx^2}$ $= -dx \times \sqrt{\frac{2b}{a - x}}$. Ainsi puisque (*hyp.*) $v = \sqrt{x}$, & (*Reg. 1.*) $v = \frac{-ds}{dt}$; l'on aura aussi $\sqrt{x} = \frac{dx}{dt}\sqrt{\frac{2b}{a - x}}$, ou bien $dt = dx \times \sqrt{\frac{2b}{ax - xx}} = \frac{2\sqrt{2b}}{a} \times \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - xx}}$. Donc en intégrant, & en décrivant le demi-cercle AZQ, l'on aura t (HT) $= \frac{2\sqrt{2b}}{a} \times \int \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - xx}} = \frac{2\sqrt{2b}}{a} \times AZ = \frac{AZ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}$, pour le tems de la chute de K en L. Et par conséquent en faisant par-tout les ordonnées $HT = \frac{AZ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}$, c'est-à-dire, en raison des Arcs correspondans AZ du demi-cercle AZQ; la ligne ATD, qui passera par toutes les extrémités T de ces ordonnées, sera la courbe des tems requis en cet exemple, laquelle servira à déterminer ou à comparer les tems d'une même chute par différens Arcs de cette Cycloïde; & réciproquement.

La même chose se tirera encore de même de la premiére des deux Regles précédentes (*art. 4.*) en supposant seulement que l'Arc QL est double de la corde QX; car cette corde étant $= \sqrt{2ab - 2bx}$, l'on aura aussi l'Arc cycloïdal $QL = 2\sqrt{2ab - 2bx}$, avec son élément $ds = \frac{-2b\,dx}{\sqrt{2ab - 2bx}} = -dx\sqrt{\frac{2b}{a - x}}$, & le reste comme ci-dessus.

XXIV. De-là suit encore une nouvelle maniére de démontrer les chutes isochrones d'un poids tel qu'on le vient de supposer, dans cette Cycloïde renversée. En effet de ce que dans la chute de AK en HL le long de cette Cycloïde ainsi renversée, les tems HT sont par tout (*art.* 23.) égaux à $\frac{AZ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}$, il s'enſuit que le tems QD de la chute entiére de K en Q le long de KLQ, ſera $= \frac{AZQ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}$, c'eſt-à-dire, conſtant & toujours le même, quel que ſoit le point K de la Cycloïde GLQ, puiſqu'à quelque hauteur AQ que ce point K réponde, le rapport de AZQ à AQ, qui eſt celui d'une demi-circonférence circulaire quelconque à ſon diamétre, ſera toujours le même. Donc de quelque hauteur K qu'un corps de peſanteur conſtante & de directions paralléles à l'Axe SQ d'une Cycloïde renverſée GLQ, tombe le long de cette Cycloïde ; il arrivera toujours à ſon fond Q en tems égaux : & par conſéquent de telles chutes ſeront toutes iſochrones, ainſi que je l'ai déja démontré à l'Académie en pluſieurs maniéres toutes différentes de celle de M. Huguens & de celle-ci.

XXV. Mais la plus générale de toutes eſt exprimée par cette équation $as = tv$ (tirée de la comparaiſon des parties ſemblables des Arcs à parcourir, dont M. Bernoulli Profeſſeur à Groningue s'eſt ſervi dans les Actes de Leipſik de 1698. pag. 267. pour prouver l'iſochroniſme des chutes faites ſuivant l'hypothéſe de Galilée, dans la Cycloïde renverſée, & dont je me ſervis auſſi en 1697 à l'Académie pour le même ſujet) dans laquelle s ſignifie l'Arc compris depuis le fond juſqu'à tel point qu'on voudra de la courbe cherchée ; t, le tems employé à le parcourir ; v, la vîteſſe acquiſe à la fin de cet Arc, ou de cette chute ; & a, l'unité. Cette équation, dis-je, exprime en général une courbe le long de laquelle un corps tombant à quelque point de cette courbe qu'il commence, il arrivera toujours au fond de cette même courbe dans des tems qui ſeront non pas ſeulement égaux, mais en telle raiſon qu'on voudra, quelle que ſoit l'hypothéſe de ſes directions & des vîteſſes qu'il acquiert en tombant. De ſorte qu'en faiſant t conſtant, par exemple $t = a$, pour le cas des chutes requiſes en tems égaux, l'on aura auſſi pour lors $v = s$; laquelle équation, quelque hypothéſe de peſanteur qu'on faſſe encore,

encore, donnera toujours la courbe le long de laquelle les chutes faites suivant cette hypothése, seroient isochrones; & réciproquement quelque courbe qu'on propose, cette équation déterminera toujours l'hypothése de pesanteur ou de variation de vîtesses, requise pour rendre cette courbe isochrone.

Par exemple, pour trouver la courbe GLQ, qui seroit isochrone dans l'hypothése de Galilée touchant l'accélération des Corps qui tombent; soit la chute le long de cette courbe, commencée à celui de ses points L qu'on voudra, duquel parte l'horisontale LH, qui rencontre en H la verticale HQ, lesquelles soient encore appellées z & m. L'hypothése de Galilée touchant l'accélération des Corps qui tombent, donnera $v = \sqrt{m}$; ce qui déterminera ici l'équation générale $v = s$, à $\sqrt{m} = s$: d'où resulte $\frac{dm}{2\sqrt{m}} = ds = \sqrt{dm^2 + dz^2}$, & enfin $dz = dm\sqrt{\frac{1}{4m} - 1} = dm\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - m}}{\sqrt{m}}$, qui est une équation à la Cycloïde ordinaire, dont le diamétre du cercle générateur, seroit le quart du paramétre de la Parabole exprimée par $v = \sqrt{m}$. De sorte que ce paramétre étant arbitraire, on voit que toute Cycloïde ordinaire sera la courbe isochrone de cette hypothése de pesanteur ou d'accélération dans la chute des Corps.

Réciproquement une Cycloïde ordinaire quelconque étant donnée, si l'on vouloit trouver l'hypothése de pesanteur ou d'accélération dans les Corps qui tombent, propre à en rendre les chutes isochrones le long de cette courbe; son équation étant $dz = dm\frac{\sqrt{\frac{1}{4} - m}}{\sqrt{m}}$, son élément (ds) seroit $= \frac{dm}{2\sqrt{m}}$; ce qui (en intégrant) donneroit $\sqrt{m} = s = v$. D'où l'on voit que les vîtesses (v) acquises à la fin des chutes, devroient être alors comme les racines des hauteurs $HQ\,(m)$, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire avec Galilée.

XXVI. De même, si l'on veut tout à la fois les hypothéses de pesanteur ou de vîtesses requises pour rendre isochrone celle qu'on voudra des trois Cycloïdes à bases droites ; soit prise GLQ pour une des trois à discrétion, dont la base SG soit à la demi-circonférence $SFXQ$ de son cercle générateur $:: g.f.$ Et le reste comme ci-dessus. On trouvera de même, en prenant encore $SQ = 2b$, & $HQ = m$ pour la hauteur du point quelconque L, où commence la chute le long de celle qu'on voudra de ces trois Cycloïdes renversées, dont GLQ représentera l'*Allongée*, si $g > f$; l'*Accourcie*, si $g < f$; & l'ordinaire, si $g = f$: on trouvera, dis-je, de même en général pour toutes les trois à la fois, que les vîtesses requises pour les rendre isochrones, doivent être comme les sommes correspondantes des Elémens $\frac{dm}{f} \cdot \sqrt{\frac{bbff + 2bbfg + bbgg - 2bfgm}{2bm - mm}}$. D'où l'on voit encore en particulier pour la Cycloïde ordinaire, qui donne $f = g$, que ces vîtesses doivent effectivement être comme $\int dm \sqrt{\frac{4bb - 2bm}{2bm - mm}} = \int dm \sqrt{\frac{2b}{m}} = 2\sqrt{2bm}$: c'est-à-dire, comme les Racines de hauteurs m (HQ) des chutes, pour rendre cette Cycloïde isochrone, ainsi qu'on l'a vû jusqu'ici.

XXVII. Reprenant ainsi GLQ pour une Cycloïde ordinaire, si l'on prolonge présentement KA jusqu'à la rencontre du demi-cercle SXQ en F, & qu'on lui fasse la corde FQ qui rencontre LV en E ; l'on aura (*art.* 23.) Le tems $\left(\frac{AZ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}\right)$ par KL, au tems $(2\sqrt{SQ})$ par SQ, ou par $FQ :: AZ. AQ$. Donc sçachant d'ailleurs que dans cette hypothése de Galilée touchant l'accélération de la chute des Corps, le tems par FQ est au tems par $FE :: \sqrt{FQ}. \sqrt{FE} :: \sqrt{AQ}. \sqrt{AH}$. L'on aura aussi le tems par KL, au tems par $FE :: AZ \times \sqrt{AQ}. AQ \times \sqrt{AH} :: AZ. \sqrt{AQ \times AH}$. C'est-à-dire, comme l'Arc AZ à sa corde. De sorte que lorsque AK est en SG, ou A en S, alors les Arcs AZ & SFX ſe trouvant égaux entre eux, & FE confondue avec SH; l'on aura auſſi pour lors le tems par GL, au tems par SH, comme l'Arc SX eſt à ſa corde. Et par conſéquent le tems d'une telle chute de G en Q le long de la demi-Cycloïde entiére GLQ, eſt au tems d'une pareille chute de S en Q le long de tout le diamétre SQ de ſon cercle générateur, comme la demi-circonférence SXQ de ce cercle eſt à ſon diamétre SQ.

XXVIII. Il ſuit auſſi de-là qu'une Cycloïde ainſi renverſée GLQ étant donnée avec ſon cercle générateur SXQ, & une verticale conſtante & déterminée GP égale ou moindre que $\frac{\overline{SXQ}^2}{SQ}$; ſi l'on prend ſur la demi-circonférence SXQ de ce cercle, l'Arc SX moyen proportionnel entre ſon diamétre SQ & cette verticale GP, & qu'on mene enſuite l'horiſontale XL qui rencontre la Cycloïde en L; l'on aura l'Arc GL tel qu'un même Corps tombant de G, le parcourera dans le même tems qu'il parcourroit GP, la chute commençant de part & d'autre en G. Car dans l'hypothéſe de Galilée, dont il s'agit ici, le tems par GP doit être au tems par $SH :: \sqrt{GP} . \sqrt{SH} :: \sqrt{GP \times SQ} . \sqrt{SH \times SQ}$ (*conſtr.*) $:: SX . \sqrt{SH \times SQ}$. C'eſt-à-dire (*art.* 27.) comme le tems par GL eſt au tems par SH. Donc les tems par GL & par GP doivent être auſſi égaux entre eux.

Cela étant, quelque nombre de Cycloïdes GLM qu'on imagine par le point G, dont les baſes ſoient ſur GS prolongée; ſi l'on en retranche de cette façon tout autant d'Arcs GL, chacun d'eux ſera toujours parcouru par ce même Corps dans le même tems qu'il mettroit à parcourir GP: Et la Courbe PL qui paſſera par tous ces points L, ſera la *Synchrone* dont M. Bernoulli de Groningue fait mention dans les Actes de Leipſik, au mois de Mai de 1697.

XXIX. Puiſque (*art.* 23.) le point K indéterminément pris ſur la Cycloïde GLQ, donne toujours $\frac{AZ}{AQ} \times 2\sqrt{SQ}$ pour le tems employé à tomber de AK en HL le FIG. IX.

long de KL ; si l'on prend quelqu'autre point M à discrétion sur cette même Cycloïde, par lequel on tire MR parallele à AK, & de plus telle autre paralléle NY qu'on voudra, laquelle rencontre en Y le demi-cercle RYQ décrit sur le diamétre RQ, l'on aura de même $\frac{RY}{RQ} \times 2\sqrt{SQ}$ pour le tems employé à tomber de M en N le long de MN, d'une chute commencée en M: de sorte que ces tems seroient égaux, si l'on avoit $\frac{AZ}{AQ} = \frac{RY}{RQ}$, c'est-à-dire, si les Arcs AZ & RY étoient semblables.

Donc un même Corps tombant de K en Q, & ensuite de M en Q, les chutes commençant en K & en M, si l'on donnoit un point L quelconque au-dessous de K, & qu'on en demandât un autre N, tel que ce Corps tombant de M, il parcoure MN dans le même tems que tombant de K, il parcourroit KL ; il n'y auroit qu'à faire les horisontales KA, LH, MR, avec les demi-cercles AZQ, & RYQ autour des centres E & F sur les diamétres AQ & RQ, dont le premier (cercle) étant rencontré en Z par LH, il en faudroit tirer le rayon EZ, & lui faire ensuite paralléle un rayon FY de l'autre cercle : parce qu'en tirant YN paralléle à RM, l'on auroit MN pour l'Arc de Cycloïde cherchée, c'est-à-dire, tel qu'un Corps tombant de M, le parcourra dans le même tems que tombant de K, il parcourroit KL ; puisque de cette maniére les Arcs circulaires AZ & RY se trouveroient semblables, ainsi qu'on a vû ci-dessus, & qu'il étoit requis pour cela.

XXX. Telle est la maniére de se servir de la premiére des deux Regles de l'Art. 4 laquelle nous ayant mené peut-être un peu trop loin pour un Mémoire, je n'en rapporterai point d'autre Exemple. Je ne dirai rien non plus de l'usage que ces deux Regles peuvent avoir ensemble, ainsi que les Art. 5, 6, & 7. ci-dessus l'indiquent assez. Voici seulement en deux mots comment s'en déduisent celles que je donnai le 30. Janvier dernier pour les mouvemens en lignes droites.

Reprenons la premiére Figure, & concevons la ligne

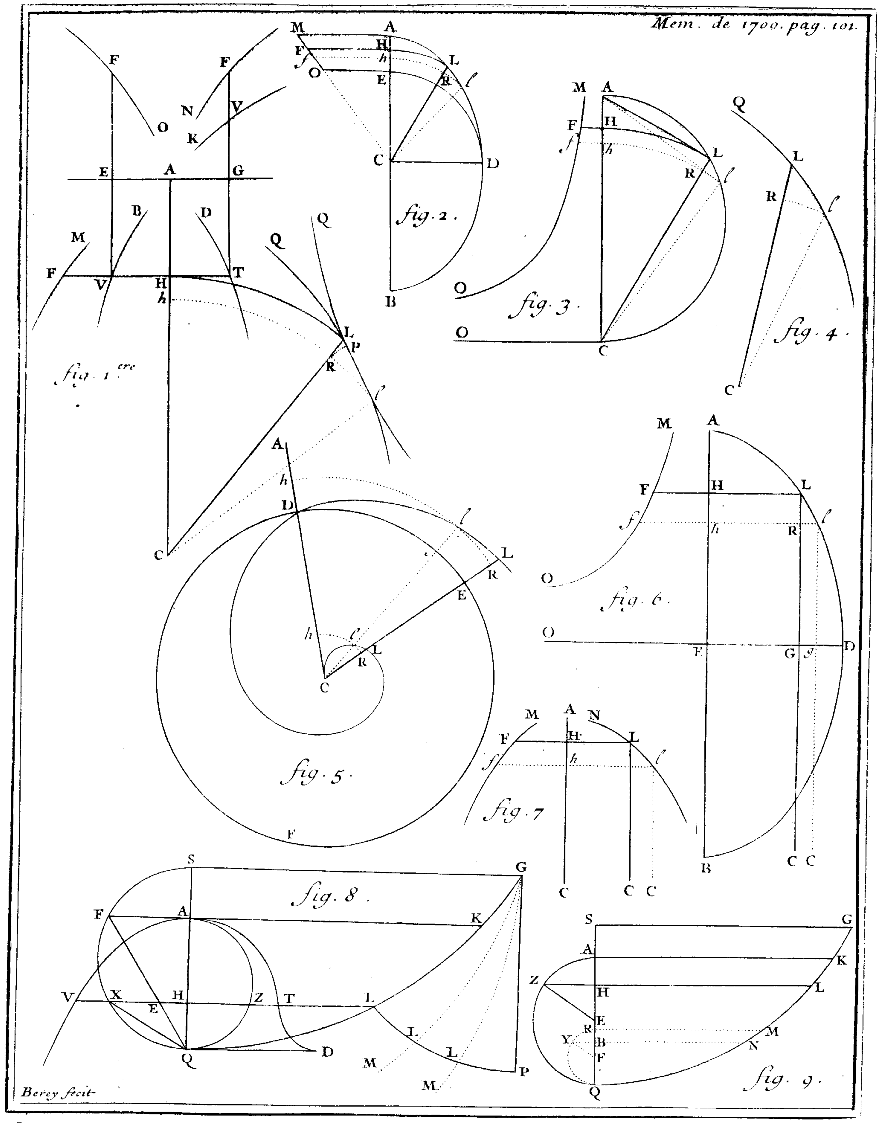
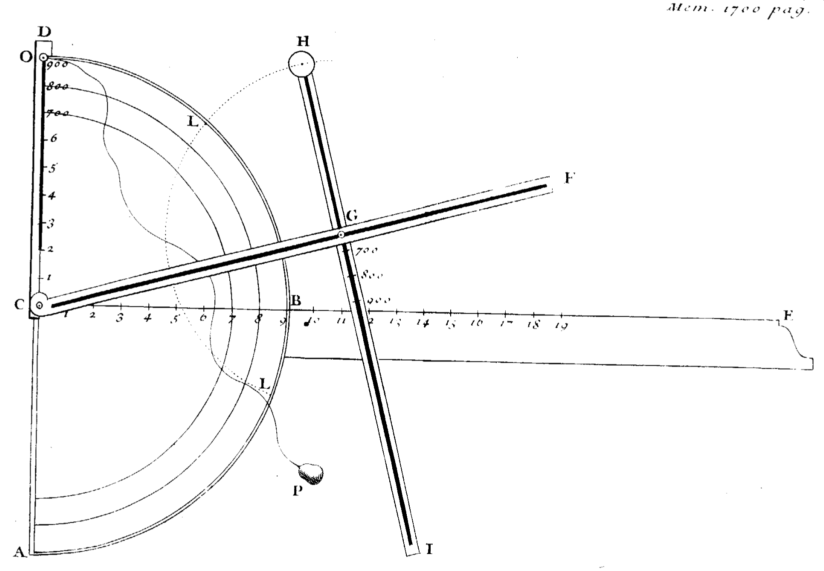


fig. 1.ere
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.
fig. 7
fig. 8.
fig. 9.
Berey fecit



Berey fecit

LQ, ſuivant laquelle on ſuppoſe le Corps ſe mouvoir, non plus comme une courbe, mais comme une droite qui ſe confond avec AC. En ce cas HL s'anéantiſſant, l'on aura $Ll(ds) = Hh(dx)$, ou plutôt ces deux Elémens ſeront confondus en un. Donc tout le reſte demeurant le même, les Regles générales des mouvemens en lignes courbes de l'Art. 4. ſe changeront ici pour les mouvemens rectilignes, en celles que je donnai le 30. Janvier dernier : Les voici, en faiſant encore dt conſtante. FIG. X.

REGLES GENERALES
DES MOUVEMENS EN LIGNES DROITES.

1°. $v = \frac{dx}{dt}$

2°. $y = \frac{ddx}{dt^2} \left(\frac{dv}{dt}\right)$.

Je ne dirai rien non plus de l'uſage de ces Regles, en ayant ſuffiſamment parlé dans le Mémoire du 30. Janvier dernier. D'ailleurs il n'y a pas moyen de s'étendre ici davantage.

EXPLICATION PHYSIQUE ET CHYMIQUE des Feux ſouterrains, des Tremblemens de Terre, des Ouragans, des Eclairs & du Tonnerre.

PAR M. LEMERY.

MON deſſein eſt de donner par le moyen d'une Opération de Chymie, une idée ſenſible de ce qui ſe paſſe dans les nuës, lorſqu'elles s'ouvrent en tems de tempête, pour produire les Eclairs & le Tonnerre : mais auparavant que de faire voir cette Opération, il eſt à propos de parler de la matiére qui cauſe des effets ſi violens, & d'examiner ſa nature & ſon origine. 21. Avril 1700.

On ne peut pas raiſonnablement douter que la matiére de l'Eclair & du Tonnerre, ne ſoit un ſoulfre enflâmé & élancé avec beaucoup de rapidité. Nous ne connoiſſons