ACCORD DES SOLUTIONS.

Du Mémoire du 18. Juillet dernier, pag. 250. &c. avec celles de M. Nevvton, & de M. Hughens, touchant la ligne que décriroit un corps de pesanteur constante jetté suivant quelque direction que ce fût dans un milieu dont les résistances seroient en raison des vitesses de ce corps.

PAR M. VARIGNON.

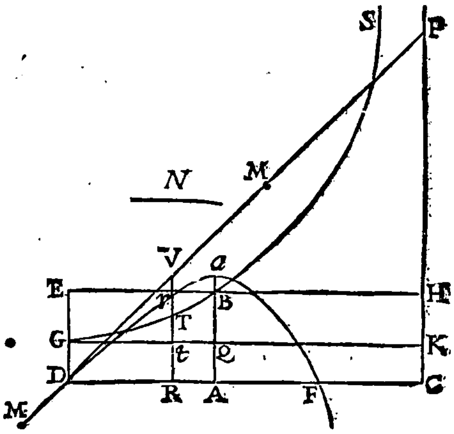
1708. 24. Aoust

LE 18. Juillet dernier je donnai deux Solutions d'un Problême où il s'agissoit de trouver la Courbe que décriroit un corps de pesanteur constante jetté à volonté dans un milieu résistant en raison des vitesses de ce corps; & le mouvement de projection oblique consideré comme simple, m'ayant suffit pour cela, au lieu que M. Newton & M. Hughens l'ont consideré comme composé d'un horizontal & d'un vertical, je promis de résoudre aussi ce Problême en décomposant ainsi le mouvement de projection, & de faire voir l'accord de mes Solutions avec celles de ces deux grands Geometres. Mais ce que j'ai trouvé sur tout cela étant trop long pour être ici, je croy qu'il suffira quant à present de faire voir l'accord des deux Solutions précédentes avec les leurs, & consequemment aussi des leurs entr'elles, en démontrant que la Courbe de projection que j'ai trouvée (*pag.* 251. *&c.*) sans décomposer le mouvement du jet, comme ils ont fait, en un horizontal & un vertical, est précisément la même que la leur: en voici l'Identité en me servant de leurs figures.

IDENTITE' I.

De la Courbe de projection trouvée par M. Newton dans l'hypothêse des résistances du milieu en raison des vitesses du corps mû, avec celle qui a été trouvée dans les Solutions des pag. 251. & 264. *de ces Mémoires-ci.*

I. Voici la construction que M. Newton donne de cette Courbe dans le Liv. 2. Sect. 1. Prop. 4. pag. 241. de ses Princip. Math. de la Phil. Nat. Si d'un point quelconque *D* on jette un corps de pesanteur constante suivant la ligne droite *DP*, dont la longueur *DP* exprime la vitesse de projection au commencement du mouvement, & que du point *P* on fasse la verticale *PC* qui rencontre en *C* l'horizontale *DC*; soit cette horizontale divisée en *A*, ensorte que *DA* soit à *AC* comme la résistance initiale du milieu au mouvement de bas en haut, est à la pesanteur du corps jetté; c'est-à-dire, suivant la Remarque 2. sur le Prob. 3. du Mem. du 7. Mars dernier, pag. 153. comme la vitesse initiale de bas en haut est à la plus grande (appellée *terminale*) que le mobile pût acquerir en vertu de sa pesanteur en tombant dans le milieu supposé. Puis après avoir fait une hyperbole quelconque *GTBS* entre les asymptotes orthogonales *CD*, *CP*, laquelle rencontre en *G*, *B*, les verticales *DG*, *AB*; soit achevé le parallelogramme *DGKC* dont le côté *GK* coupe *AB* en *Q*. Soit enfin la ligne $N . QB :: DC . CP$. Et après avoir fait la verticale *RV* d'un point quelconque *R* de l'horizontale *DC*, laquelle verticale rencontre l'hyperbobe *GTBS* en *T*, & les droites *GK*, *DP*, en *t*, *V*, soit prise $Vr = \frac{tGT}{N}$.



Cela fait, M. Newton démontre que la ligne *DraF* qui passera par tous les points *r* ainsi trouvez, sera la Courbe de projection que le corps jetté suivant *DP* décrira dans le milieu supposée résistant en raison des vitesses de ce corps.

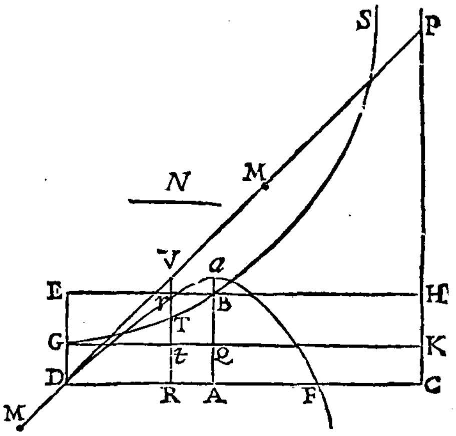
II. Pour tirer presentement de cette construction une équation de cette Courbe qui en fasse voir l'identité avec celle des Solutions des pag. 251. & 264. soit prise *PM* à *DP* comme la vitesse terminale du corps jetté est à sa vitesse initiale de projection suivant *DP*. Soient ensuite appellées MP, a; DP, b; CP, c; DC, e; AC, m; AB, p; DV, y; Vr, x; & DR, u.

III. Cela posé, l'hyperbole *GBS* donnera $DC\,(e) . AC\,(m) :: AB\,(p) . GD = \frac{mp}{p}$. Et $RC\,(e - u) . AC\,(m) :: AB\,(p) . RT = \frac{mp}{e-u}$. D'où résultent $QB\,(AB - GD) = p - \frac{mp}{e} = \frac{ep - mp}{e}$, l'aire hyperbolique $GDRT = \int \frac{mpdu}{e-u}$, le rectangle $GDRt = \frac{mpu}{e}$; & par conséquent le triligne hyperbolique $tGT\,(GDRT - GDRt) = \int \frac{mpdu}{e-u} - \frac{mpu}{e}$.

IV. Mais après avoir pris $N . QB\,\left(\frac{ep-mp}{e}\right) :: DC\,(e) . CP\,(c)$. c'est-à-dire, $N = \frac{ep - mp}{c}$, la construction (*art.* 1.) éxige $Vr\,(x) = \frac{tGT}{N} = \frac{c \times tGT}{ep - mp}$. Donc (*art.* 3.) $x = \frac{c}{ep-mp} \times \int \frac{mpdu}{e-u} - \frac{c}{ep-mp} \times \frac{mpu}{e} = \frac{c}{e-m} \times \int \frac{mdu}{e-u} - \frac{cmu}{ee-em}$, & (en differentiant) $dx = \frac{c}{e-m} \times \frac{mdu}{e-u} - \frac{cmdu}{ee-em} = \frac{c}{e-m} \times \frac{medu - medu - mudu}{ee-eu} = \frac{mc}{ee-em} \times \frac{udu}{e-u}$. Donc aussi les triangles semblables *DCP*, *DRV*, donnant $DP\,(b) . DV\,(y) :: DC\,(e) . DR\,(u)$. D'où résultent $u = \frac{ey}{b}$, $du = \frac{edy}{b}$, $c - u = e - \frac{ey}{b} = \frac{cb - ey}{b}$, $udu = \frac{eeydy}{bb}$, & $\frac{udu}{e-u} = \frac{eydy}{bb - by}$; l'on aura $dx = \frac{mc}{ee-em} \times \frac{eydy}{bb - by} = \frac{mc}{e-m} \times \frac{ydy}{bb - by}$

V. Si

V. Si l'on considere presentement avec M. Newton, la vitesse de projection suivant *DP*, comme composée d'une horizontale suivant *DC*, & d'une verticale de bas en haut suivant *CP*; cette vitesse de projection se trouvera être à la verticale qui en résulte :: *DP* (b). *CP* (c). Et (*art.* 1.) cette verticale à la terminale :: *DA* ($e-m$). *AC* (m).



Donc (en multipliant par ordre (la vitesse de projection suivant *DP*, sera ici à la terminale du corps jetté :: $be - bm . cm :: b . \frac{cm}{e-m}$. Mais (*art.* 2.) la premiere de ces deux vitesses est aussi à la seconde :: *DP* (b) *PM* (a). Donc $b . \frac{cm}{e-m} :: b . a$. Et par consequent $a = \frac{cm}{e-m}$. Donc enfin en substituant a au lieu de cette fraction dans l'équation $dx = \frac{mc}{e-m} \times \frac{ydy}{bb-by}$ trouvée dans le précédent art. 4. l'on aura ici $dx = \frac{aydy}{bb-by}$ pour l'équation de la Courbe *DraF* de projection trouvée par M. Newton; laquelle équation ayant aussi été trouvée dans les pag. 255. 269. & 270. du Mem. du 18. Juillet dernier, pour celle de la Courbe que les Solutions des pag. 251. & 264. y ont données, fait voir l'accord de mes Solutions avec celle de ce grand Geometre. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

REMARQUE.

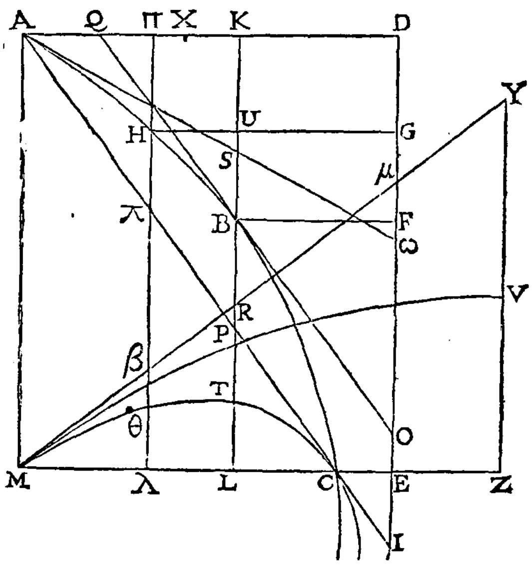
Sur la Parabole que le corps jetté auroit décrite dans le vuide, suivant M. Newton.

VI. Pour ce qui est de la Parabole que le corps jetté suivant *DP*, auroit décrite dans un milieu sans résistance, M. Newton l'a aussi déterminée en démontrant (*Corol.* 1. *pag.* 242. & 243. *Princ. Math.*) que son parametre au point D de projection, auroit été $= \frac{2DP \times DP \times DA}{AC \times CP}$. Mais (*art.* 2. & 5.) $MP = a = \frac{mc^2}{e-m} = \frac{AC \times CP}{DA}$. Donc ce parametre en D doit aussi être $= \frac{2DP \times DP}{MP}$; & par conséquent le même, en d'autres noms, que celui que nous avons déterminé dans l'art. 2. de la Remarque des pag. 270. &c. pour ce point D de la Parabole cherchée.

IDENTITE' II.

De la Courbe de projection trouvée par M. Hughens dans la précedente hypothêse des résistances du milieu en raison des vitesses du corps mû, avec celle qui a été trouvé dans les Solutions des pag. 251. & 261. *de ces Memoires-ci.*

I. M. Hugens suppose dans la construction de cette Courbe de projection (pag. 169. 170. & 171. de son *discours de la cause de la pesanteur*) ce qu'il a dit, deux pages auparavant de la logarithmique qu'il y emploïe. *Cette ligne infinie* (dit il) *étant* ABC, *elle a une ligne droite pour asymptote, comme* DE; *dans laquelle si on prend des parties égales quelconques qui se suivent, comme* DG, GF, & *que l'on tire des points* D, G, F, *des perpendiculaires jusqu'à la Courbe, sçavoir* DA, GH, FB, *ces lignes seront proportionelles conti-*



nues.... Soit KC *parallele à son asymptote, & qu'au point* B *cette Courbe soit touchée par la droite* BO *qui rencontre* DE *en* O, *&* DA *en* Q. *Laquelle tangente se trouve en prenant* FO, *depuis l'ordonnée* BF, *égale à une certaine longueur, qui par toute les tangentes est la même..... Puis soit* AC *parallele à cette tangente, coupant* KB *prolongée en* P; *& du point* C, *où elle rencontre la Courbe, soit tirée* CLM *parallele à* AD, *& coupant* KB *prolongée, &* AM *parallele à l'asymptote, aux points* L *&* M.

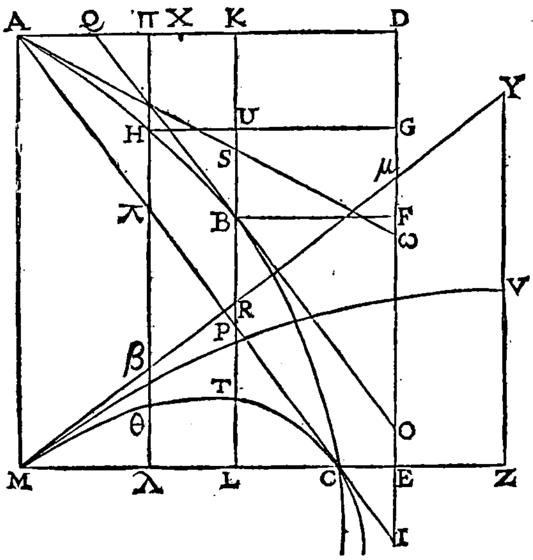
M. Hughens après s'être servi (*pag.* 171.) de cette construction pour énoncer les proprietez de la logarithmique, que nous avons démontrée dans le Mem. du 13 Juin dernier, p. 212. &c. par raport aux mouvemens des corps dans un milieu qui leur résisteroit en raison de leurs vitesses, il s'en sert aussi pour construire la Courbe de projection dont il s'agit ici, en appellant *vitesse terminale* de chaque corps, la plus grande qu'il pût acquerir en vertu de sa pesanteur en tombant dans ce milieu. *Dans la même figure* (dit-il pag. 171) *si l'angle du jet sur la ligne horizontale est* LMR, *avec une vitesse donné, dont le mouvement en haut soit à la vitesse terminale comme* AK *à* KD: *soit repetée la construction précédente, & que la droite* AS, *qui touche la Courbe* ABC *en* A, *rencontre* KB *en* S. *Puis comme* SP *à* BP *ainsi soit* RL *à* LT, *& sur la base* MC *soit dressée une figure proportionelle au segment* ABCP, *ensorte que les paralleles & également distantes de l'asymptote* DE *dans l'une & l'autre figure* (il en fait deux comprises en celle-ci) *ayent par tout la même raison de* BP *à* TL. *Ce sera* (dit-il) *la Courbe* MTC *qui marquera la figure requise du jet.*

M. Hughens n'en dit pas davantage sur cette Courbe, que voici démontrée par son identité avec la nôtre des p. 251. 264. 265. & avec la précédente *DraF* (*pag.* 303.) de M. Newton. Pour cela soit presentement *GH* une ordonnée quelconque de la logarithmique *ABC*, par le point *H* de laquelle soit la droite $\Pi\lambda$ parallele à *DE*, & qui rencontre *AD*, *APC*, *MR*, *MTC*, *ME*, en Π, π, β, θ, λ. Soient ensuite les droites *APC*, *MR*, *AS*, prolongées jusqu'à la rencontre de DE en I, π, ω, & enfin KL rencontrée en U par GH parallele à DA.

II. Cela fait, la logarithmique ABC ayant ses soûtangentes $D\omega$, FO, égales entr'elles, l'on aura aussi $\omega O = DF = KB$, outre $OI = BP$; & par consequent $\omega I = KP$.

Soient presentement appellées $D\omega$ ou FO, a; $M\mu$, b; $E\mu$, c; EM ou DA, e; ML ou AK, n; $M\beta$, y; $\beta\theta$, x; KU ou πH, t; & UH, u.

III. Il est manifeste que si l'on prend $M\mu$ pour la vitesse de projection suivant cette ligne, l'on aura ME pour la vitesse horizontale, & $F\mu$ pour la verticale, qui en résultent; & aussi (suivant la Remarque de la pag. 219 jointe aux Corol. 9. & 10. de la pag. 123.) FO ou $D\omega$ pour la terminale du corps jetté : de sorte que la vitesse de bas en haut



sera ici à la terminale :: $E\mu$. FO. Donc ayant aussi (*art.* 1.) AK à KD, ou ML à LE en cette raison, l'on aura ici $E\mu$ (c). FO (a) :: ML (n). $LE = \frac{an}{c}$. Par conséquent (*art.* 2.)

$$ME\ (e) = n + \frac{an}{c},\ \&\ GH = u + \frac{an}{c}.$$

On aura de plus FB ou $EL \left(\frac{an}{c}\right)$. FO (a) :: AK (n). $KP = c$. Et conséquemment aussi (*art.* 2.) $E\mu = KP = \omega I$: d'où résulte pareillement $\omega I = c$, & $DI = a = c$.

IV. Les paralleles DE, KL, donneront aussi DA (e).

$KA\,(n) :: \varpi A.\ SA :: \varpi I\,(c).\ SP = \frac{cn}{e}$. Et $EM\ (e).\ LM\ (n) :: E\mu\,(c).\ LR = \frac{nc}{e}$. Par conséquent $SP = LR$. Mais (*art.* 1.) $SP.\ LR :: BP.\ LT :: H\pi.\ \lambda\theta$. Donc aussi $BP = LT$, & $H\pi = \lambda\theta$.

V. Les triangles semblables $ME\mu$, $M\lambda\beta$, donneront pareillement $M\mu\ (b).\ M\beta\ (y) :: ME\ (e).\ M\lambda$ ou $A\Pi = \frac{ey}{b}$. Et $M\mu\,(b).\ M\beta\,(y) :: E\mu\,(c).\ \lambda\beta = \frac{cy}{b}$. D'où résulte $\lambda\theta\,(\lambda\beta - \beta\theta) = \frac{cy}{b} - x$; & conséquemment aussi (*art.* 4.) $H\pi = \frac{cy}{b} - x$.

VI. Mais d'un autre côté, ayant (*art.* 3.) $DI = a + c$, & (*art.* 5.) $A\Pi = \frac{ey}{b}$, les triangles semblables ADI, $A\Pi\varpi$, donnent $AD\ (e).\ DI\ (a+c) :: A\Pi\left(\frac{ey}{b}\right).\ \Pi\varpi = \frac{ay + by}{b}$. D'où résulte $H\pi\,(\Pi\varpi - \Pi H) = \frac{ay+cy}{b} - t$. Donc (*art.* 5.) $\frac{cy}{b} - x = \frac{ay+cy}{b} - t$, ou $t = \frac{ay}{b} + x$, & $dt = \frac{ady}{b} + dx$.

VII. Or la logarithmique ABC, ayant $\frac{dt}{a} = \frac{-du}{GH}$ (*art.* 3.) $= \frac{-du}{\frac{an}{c} + u}$, c'est-à-dire, $\frac{dt}{a} = \frac{-du}{\frac{an}{c} + u}$ pour son équation, dont u (*art.* 2.) $= UH = KA - A\Pi$ (*art.* 2. & 5.) $= n - \frac{ey}{b}$, $du = -\frac{edy}{b}$, & $\frac{an}{c} + u = \frac{an}{c} + n - \frac{ey}{b}$ (*art.* 3.) $= e - \frac{ey}{b} = \frac{eb - ey}{b}$; cette logarithmique donnera aussi $\frac{dt}{a} \left(\frac{-du}{\frac{an}{c} + u}\right) = \frac{edy}{b} \times \frac{b}{eb - ey} = \frac{dy}{b - y}$, ou $dt = \frac{ady}{b - y}$. Donc (*art.* 6.) $\frac{ady}{b - y} = \frac{ady}{b} + dx = \frac{ady + bdy}{b}$, ou $abdy = abdy - aydy + bbdx - bydx$; d'où résulte $\frac{aydy}{bb - by} = dx$ pour l'équation de la Courbe MTC de projection, construite par M. Hughens : laquelle équation ayant aussi été trouvée dans les pag. 255. 269. & 270. du Mem. du 18. Juillet dernier, pour celle de la Courbe que les Solutions des pag. 251. & 264. y ont données ; & ci-dessus (*Ident.* 1.) pour celle de la Courbe *DraF* de M. Newton ; fait voir l'accord de mes Solutions avec celles de ces deux Auteurs, & des leurs entr'elles. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

REMARQUE.

Sur la Parabole que le corps jetté auroit décrite dans le vuide, suivant M. Hughens.

VIII. M. Hughens, après avoir pris (*pag.* 171.) $AX = \frac{AK \times AK}{2DK}$, dit que *comme* QA *à* AX, *si l'on fait que* TL *ait cette même raison à une autre ligne* VZ : *ce sera la hauteur de la Parabole* MV *que fait le jet libre commencé en* M *avec la même force, & dans la même direction* MR, *qu'avoit l'autre jet.*

Pour le démontrer, il faut considerer que l'analogie de $KP. KA :: FO. DK :: 2FO. 2DK.$ donnant $\frac{KP}{2FO} = \frac{AK}{2DK}$, l'on aura aussi $\frac{KP \times KP}{2FO}. \frac{KA \times KA}{2DK} :: KP. KA :: BP. QA.$ ou $\frac{KP \times KP}{2FO}. BP :: \frac{KA \times KA}{2DK}. QA :: AX. QA.$ Mais en prenant $KP = KA$, on a vû en d'autres noms dans le Corol. 11. des pag. 142. & 143. du Mem. du 7. Mars dernier, que la hauteur du jet libre de bas en haut, étoit à son élevation malgré les résistances ici supposées $:: \frac{KP \times KP}{2FO}. BP.$ Et (*Corol.* 8. *p.* 141. *du même Mem.*) que BP étoit la hauteur de ce jet dans le milieu résistant. Donc la premiere de ces hauteurs sera pareillement ici à la seconde $:: AX. QA.$ Et TL (*art.* 4.) $= BP$, sera cette seconde hauteur parcouru dans le milieu résistant (comme l'autre dans le milieu libre) jusqu'à extinction des vitesses de bas en haut. Donc en prenant $VZ. TL :: AX. QA.$ l'on aura aussi VZ pour la hauteur du même jet dans le milieu sans résistance, c'est-à-dire, pour la hauteur de la Parabole qui y seroit décrite en vertu de ce jet, ainsi que l'a dit M. Hughens. Par consequent *si dans l'angle* LMR *on ajouste* YZ *perpendiculaire à* MC, *& égale à la double* VZ (ainsi qu'il le dit encore p. 172.); *on aura le sommet de cette Parabole en* V *au milieu de* YZ, *& sa demie base ou demie amplitude* MZ.

IX. Cette Parabole ainsi construite par M. Hughens, se peut encore démontrer être celle que le corps jetté (comme ci-dessus) suivant MY, décriroit dans un milieu sans résistance: cela, dis-je, se peut encore démontrer par l'identité de cette Parabole MV avec celle que nous avons démontrée dans le Mem. du 18. Juillet dernier, pag. 250. &c. y devoir être décrite par ce corps ainsi jetté. Car si l'on considere par le parametre en M de celle (*art.* 8.) de M. Hughens, doit être $= \frac{MY \times MY}{VZ}$, & que $E\mu . M\mu :: ZY (2VZ). MY = \frac{2M\mu \times VZ}{E\mu}$. On verra que ce parametre en M doit aussi être $= \frac{4M\mu \times M\mu \times VZ}{E\mu \times E\mu}$. Mais à cause que (*art.* 8.) $VZ . TL :: AX . QA :: \frac{KP \times KP}{2FO} . BP$. ou $VZ \; \frac{KP \times KP}{2FO} :: TL . BP$. Et que (*art.* 4.) $TL = BP$. l'on aura aussi $VZ = \frac{KP \times KP}{2FO}$. Donc ce parametre en M, doit pareillement être $= \frac{4M\mu \times M\mu \times KP \times KP}{2FO \times E\mu \times E\mu}$ (l'art. 3. donnant $E\mu = KP$) $= \frac{2M\mu \times M\mu}{FO}$. Ce qui est le parametre trouvé en d'autres noms dans l'art. 1. de la Remarque de la pag. 270. pour celui que la parabole cherchée MV doit ici avoir en M. Ce qui prouve encore la validité de la construction que M. Hughens en a donnée dans les pages 171. & 172. de son *Discours de la cause de la pesanteur*, telle qu'on la voit dans le précédent art. 8.

Telle est la conformité de nos Solutions du Mem. du 18. *Juillet dernier, pag.* 251. *&* 264. *dans lesquelles le mouvement de projection a été consideré comme simple, avec celles de M. Newton & de M. Hughens, qui l'ont consideré com-*

me composé d'un horizontale & d'un vertical; non seulement quant à la Courbe de projection dans un milieu résistant en raison des vitesses du corps jetté, mais encore quant à la Parabole que ce corps auroit décrite en vertu du même jet dans un milieu sans résistance. Ainsi aïant déja démontré dans le Mem. du 13. Juin dernier, p. 212. &c. le surplus de ce que M. Hughens avoit encore énoncé sans démonstration sur la fin de son Discours de la cause de la pesanteur, *touchant les mouvemens faits dans ce milieu résistant, il ne nous reste plus qu'à démontrer aussi comment la Courbe de projection résultante de nos principes dans ce milieu, en considerant le mouvement oblique du jet comme composé d'un horizontale & d'un vertical, s'accorde encore avec celle de ces deux Auteurs. Ce sera pour un autre Memoire, si ce que j'ai encore trouvé sur cela, peut devenir assez court pour être inseré dans ceux-ci. Quant à l'hypothêse des milieux résistans en raison des quarrez des vitesses des corps qui y seroient mûs; beaucoup plus vrai-semblable que celle qu'on fait ici, on en verra aussi les conséquences dans d'autres Memoires tirées de la Regle générale des mouvemens faits dans des milieux qui leur résisteroient en raison quelconque, démontrée dans la Proposition générale des Mem. de 1707. pag. 386. &c. Et dans le Lem. 1. pag. 114. & 115. de ces Memoires-ci.*

MEMOIRE TOUCHANT LES ACIDES & les Alcalis, pour servir d'addition à l'article du Sel principe, imprimé dans nos Memoires de l'année 1702. pag. 36.

PAR M. HOMBERG.

1708. 1. Septembre. JE me suis engagé dans une de nos dernieres Assemblées de donner un éclaircissement distinct touchant la matiere des Acides & des Alcalis, voici l'idée que je m'en suis faite après une longue suite d'observations & de reflexions sur quantité d'operations Chimiques que j'ay faites en cette vûë, & que je rapporte ici comme toutes

nos