DEMONSTRATIONS
SIMPLES ET FACILES
De quelques proprietez qui regardent les Pendules, avec quelques nouvelles proprietez de la Parabole.

PAR M. CARRÉ.

AYant été averti par un de mes amis, à qui j'ai parlé de cette petite découverte, qu'il y avoit quelque chose de semblable dans les Journaux des Sçavans de Leipsik (ce que j'ai peut-être lû dans le tems, mais dont je ne me souvenois plus, car on ne se souvient pas de tout) j'ai balancé quelque tems à donner ce Memoire. Mais comme je ne m'y suis pas pris de la même maniere que M. Lichtscheid (c'est le nom de l'Auteur) pour déterminer la Ligne courbe dont il est question, & que je démontre d'autres choses & fais d'autres remarques que ce Mathematicien, je m'y suis déterminé d'autant plus volontiers, que je lui en abandonne toute la gloire, ne me réservant que celle d'y avoir pensé aprés lui. 1707. 16. Fevrier.

LEMME.

Les tems des vibrations des Pendules sont entr'eux en raison des racines quarrées des longueurs de ces Pendules.

Soient deux Pendules inégaux AB, AD mis dans une situation horizontale, & qu'on suppose être descendus l'un en M & l'autre en N, puis en m & en n d'une quantité infiniment petite; & soient menées les perpendiculaires ou les sinus MP, NQ des arcs parcourus. Comme le tems s'exprime par l'espace parcouru divisé par la vîtesse emploïée à le parcourir, & que les vîtesses des mouvemens accelerez sont en raison des racines quarrées des hauteurs d'où ces corps ont commencé à descendre, l'on pourra exprimer les vîtesses de chaque Pendule aux points M & N par $\sqrt{PM}$ & $\sqrt{QN}$; donc le tems par le petit arc Mm sera égal à $\frac{Mm}{\sqrt{PM}}$, & le tems par le petit arc Nn sera égal à $\frac{Nn}{\sqrt{QN}}$: Et nommant AB, a; AD, b; PM, x; & le petit arc Mm, dz, l'on aura pour le premier tems $\frac{dz}{\sqrt{x}}$; & pour avoir le second, l'on fera $AB\,(a).\ AD\,(b)::PM\,(x).\ QN = \frac{bx}{a}$; & $AM\,(a).\ AN\,(b)::Mm\,(dz).\ Nn = \frac{bdz}{a}$; donc le tems exprimé par $\frac{Nn}{\sqrt{QN}} = \frac{bdz}{a\sqrt{\frac{bx}{a}}} = \frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{ax}}$: ces tems seront donc entr'eux comme $\frac{dz}{\sqrt{x}}$ est à $\frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{ax}}$; mais $\frac{dz}{\sqrt{x}}.\ \frac{dz\sqrt{b}}{\sqrt{ax}}::1.\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}::\sqrt{a}.\ \sqrt{b}$; d'où l'on doit conclure que ces tems sont comme les racines quarrées des longueurs des Pendules. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRES.

Il est évident, 1°. que les vîtesses sont comme les tems, car elles sont comme $\sqrt{x}$ à $\sqrt{\frac{bx}{a}}$. Ainsi un Pendule étant quadruple d'un autre, sa vîtesse sera double.

2°. Que les quarrez des tems ou des vîtesses sont comme les longueurs de ces Pendules, ou comme les rayons des arcs qu'ils décrivent ; donc ils sont aussi comme ces arcs qui sont les espaces parcourus.

3°. Que les nombres des vibrations des Pendules sont en raison reciproque des racines quarrées des longueurs de ces Pendules.

4°. Il est encore évident que les vîtesses acquises de deux Pendules qui décrivent des arcs semblables, sont en raison des racines quarrées des cordes de ces arcs, ou comme les racines quarrées des sinus droits ou verses de ces arcs ; parceque toutes ces lignes sont en même raison que les rayons ou les longueurs de ces Pendules.

5°. Les vîtesses d'un même Pendule décrivant differens arcs, ſont en même raiſon que les cordes de ces arcs. Car par la proprieté du cercle ces cordes ſont entr'elles comme les racines de leurs ſinus verſes, qui ſont les hauteurs d'où le Pendule eſt deſcendu. Mais les vîteſſes de ce Pendule ſont comme les racines de ces hauteurs; donc, &c.

6°. La premiere vîteſſe d'un Pendule dans un point quelconque de l'arc qu'il décrit en deſcendant, comme en *N* eſt à la premiere vîteſſe que ce même corps auroit dans un point correſpondant de la verticale ſuivant laquelle il tomberoit, comme le ſinus *NI* de cet arc eſt au rayon ou à la longueur du Pendule *AD*. Car ſi l'on mene au point *N* une tangente, il eſt clair que ce Pendule commençant à ſe mouvoir en *N*, il aura en ce point la même détermination de mouvement, & par conſéquent la même vîteſſe que s'il ſe mouvoit réellement ſuivant cette tangente, que l'on regarde comme un plan incliné dont la hauteur eſt la ſoûtangente: Or la premiere vîteſſe d'un corps le long d'un plan incliné eſt à celle qu'il auroit ſuivant la hauteur de ce plan, comme cette hauteur eſt au plan incliné, c'eſt à dire dans ce cas comme la ſoûtangente eſt à la tangente: mais la ſoûtangente d'un cercle eſt à la tangente comme le ſinus de l'arc eſt au rayon; donc, &c. Il eſt donc évident que les augmentations de vîteſſe d'un Pendule ſont comme les ſinus des differens arcs qu'il décrit, leſquels vont toûjours en diminuant: en effet ces augmentations ſe font par des tangentes qui deviennent toûjours de plus en plus inclinées, ou qui vont toûjours en s'approchant de l'horizontale, ce qui cauſe à chaque inſtant une nouvelle détermination de mouvement.

Ces principes ſimples & faciles étant poſez, il eſt aiſé de réſoudre un grand nombre de Problemes que l'on peut propoſer ſur cette matiere.

PROBLEME.

Trouver la Ligne courbe que décrit en montant un Pendule qui seroit raccourci successivement & uniformément dans le tems de son mouvement, soit qu'il fasse ses vibrations laterales, soit qu'on le détermine à faire ses révolutions en décrivant la surface d'un Cone.

L'experience apprend que si un Pendule faisant ses vibrations laterales, est arrêté dans son mouvement par un point quelconque de sa longueur, il les fera autour de ce point, & remontera précisément à la même hauteur d'où il est descendu. (L'on fait ici abstraction de la résistance de l'air qui n'est pas sensible dans ces sortes d'experiences). Ainsi un Pendule *AB* étant arrêté en *E* aprés avoir décrit l'arc *BB*, il décrira l'arc *BF* qui a pour centre le point *E*, & remontera à la même hauteur *CB* d'où il est descendu : Car l'on sçait que les hauteurs où s'élevent les Pendules en faisant leurs vibrations, sont égales aux sinus verses des arcs qu'ils décrivent. Que si le point où on l'arrête étoit au-dessous de *C*, c'est à dire moins haut que celui d'où on le laisse tomber, il est visible que pour emploïer tout son mouvement il fera quelques tours à l'entour du point où il est arrêté, & cela plus ou moins selon qu'il tombera de plus ou moins haut. Et il seroit facile de démontrer qu'afin que le corps suspendu décrivit une circonference entiere, il faudroit que sa force centrifuge fût à son poids comme 5 à 1, c'est à dire que le fil de suspension fût tendu par une force sextuple du poids de ce mobile. Que si on l'arrête précisément à une hauteur égale à celle d'où il est descendu comme en *C*, il est clair qu'il décrira un quart de cercle entier. C'est la même chose si au lieu de l'arrêter en differens points, on venoit tout d'un coup à le raccourcir de la même quantité.

Maintenant si l'on suppose qu'un Pendule *AB* fasse ses révolutions autour du point de suspension *A*, ensorte qu'il décrive la surface d'un Cone qui seroit formé par le mouvement d'un triangle rectangle *ADC* autour de *AD*, qu'il

(margin: FIG. II. beside "periences). Ainsi un Pendule…"; FIG. III. beside "révolutions autour du point…")

y ait un anneau au point A au travers duquel passe le fil de suspension, & puisse glisser dedans comme on voudra, & qu'enfin une puissance R tire ce fil pour raccourcir successivement le Pendule aprés qu'on l'aura mis en mouvement : Il est clair que le poids B ne décrira pas le côté du Cone en montant, c'est à dire à mesure qu'on le raccourcira, parceque conservant toûjours la force de remonter à la même hauteur, il auroit plus de vîtesse qu'il ne lui en faudroit pour décrire, par exemple, la circonference de la seconde révolution, qui seroit plus petite que la premiere si elle étoit prise dans la surface du Cone, ainsi elle doit être plus grande au lieu d'être plus petite, ce qui continuëra jusqu'à ce qu'enfin le Pendule décrive un cercle parallele à l'horizon, que l'on peut considerer en ce cas comme une des bases du solide dont il décrit la surface par ses révolutions. Car soit D le centre de la circonference de la base de la surface Conique que le Pendule tend à décrire ; si l'on regarde l'arc BC comme la moitié de celui qu'il décriroit en faisant des oscillations laterales, alors la ligne BD qui est le sinus verse de cet arc BC doit être regardée comme la hauteur où ce Pendule s'est élevé ; ainsi étant déterminé par sa premiere impression de mouvement à décrire la surface Conique, il se trouvera toûjours au commencement ou à la fin de chaque révolution dans le point extrême du sinus droit de l'arc de sa hauteur, & il aura dans tous les points de ces arcs une égale vîtesse, ce que je prouve ainsi par le calcul.

Je prends un autre point quelconque E où je suppose qu'on ait fait monter le Pendule en le raccourcissant, & prenant $EP = BD = a$, tirant la perpendiculaire PM qui rencontre l'arc EM décrit du centre A, & menant du point E les cordes EM, EF, il est clair par la supposition que le Pendule se trouvera au point M. Je dis maintenant que la vîtesse du Pendule qui décrit l'arc EM est égale à la vîtesse de ce même Pendule lorsqu'il décrit l'arc BC : Car nommant AB, r ; AE, x ; & la vîtesse suivant BC, v ; l'on aura par la proprieté du cercle $BC = \sqrt{2ar}$. Et pour avoir

la corde de l'arc EF, l'on fera AB (r). $BC(\sqrt{2ar}.)$ :: AE (x). $EF = \frac{x\sqrt{2ar}}{r}$, à cause des triangles semblables AEF, ABC, & que dans les differens cercles les cordes d'arcs semblables sont entr'elles comme les rayons. De même la corde $EM = \sqrt{2ax}$. Ces choses étant posées, dans les cercles differens les vîtesses d'un Pendule qui parcourt des
* Corol 4. arcs semblables * sont comme les racines quarrées de ces cordes : l'on dira donc BC $(\sqrt{2ar}.)$ est à EF $(\frac{x\sqrt{2ar}}{r})$ comme le quarré de la vîtesse en BC (vv) est au quarré de la vîtesse en $EF = \frac{vvx}{r}$, donc cette vîtesse $= v\sqrt{\frac{x}{r}}$. Mais dans les mêmes cercles les vîtesses dans differens arcs sont com-
* Corol. 5. me leurs cordes *, donc la corde EF $(\frac{x\sqrt{2ar}}{r})$ est à la corde EM $(\sqrt{2ax})$ comme la vîtesse en EF $(v\sqrt{\frac{x}{r}})$ est à la vîtesse en EM que l'on trouve $= v$; donc la vîtesse en EM est égale à la vîtesse en BC.

Ce Pendule comme l'on voit décrira en montant une Ligne courbe, dont on demande la nature.

Pour déterminer cette Courbe, soit le Pendule raccourci ensorte qu'il n'ait plus de longueur que AE, il est clair que dans cette supposition le Pendule se trouvera au point M qui est un de ceux de la Courbe que l'on demande, & le raccourcissant encore d'une quantité infiniment petite Ee, & prenant $ep = EP$, & décrivant l'arc em, le point m sera encore un des points de cette Courbe ; & ainsi l'arc infiniment petit Mm sera l'élement de cette Courbe, & PM, pm en seront les ordonnées.

Ces choses ainsi posées, l'on voit que cette Courbe doit être telle que tous les arcs BC, EM, em décrits du centre A, & de chacun de ses points jusqu'à son axe, doivent être parcourus avec des vîtesses égales ou en tems égaux L'on aura donc à cause des triangles rectangles EPM, epm $\overline{EM}^2 . \overline{em}^2 :: \overline{PM}^2 . \overline{pm}^2$ à cause que $EP = ep$; & $\overline{PM}^2 . \overline{pm}^2 :: AE + AP . Ae + Ap$, parce qu'à cause du cercle PM, pm, sont moïennes proportionnelles entre les parties du diametre.

L'on pourroit donc énoncer ce Probleme en cette sorte, trouver la Courbe dont les quarrez des ordonnées soient toûjours proportionnels à des lignes déterminées, c'est à dire que $\overline{PM}^2$ soit à $AE + AP$ en raison constante. Ainsi nommant AE, x; $EP = BD = a$, donc $AP = x - a$; & $AE + AP = 2x - a$; PM, y; & que la raison constante soit comme a est à 1; l'on aura cette analogie $yy. 2x - a :: a. 1$; donc $yy = 2ax - aa$, qui est un lieu à la Parabole que l'on construit ainsi.

Soit menée la ligne DK, & soit prise la partie $DF = EP = a$, que l'on divisera en deux parties égales au point A, & prenant DE égale à la longueur indéterminée AE du Pendule $= x$, donc $AE = x - \frac{1}{2}a$; prenant donc EQ (y) moïenne proportionnelle entre $x - \frac{1}{2}a$, & $2a$, l'on aura $yy = 2ax - aa$, qui est l'équation qu'il falloit construire. Fig. IV.

Il est évident que le point F qui est le foyer de la Courbe, est le point de suspension, & que le point A en est le sommet; car alors $x = \frac{1}{2}a$, donc $2ax - aa = 0$, & $y = 0$, donc un Pendule faisant ses oscillations dans un plan vertical, il montera jusqu'au point A, & delà il tombera perpendiculairement. Que si $x = a$, donc $y = a$, c'est à dire que l'ordonnée qui part du foyer sera égale à la hauteur à laquelle le Pendule monte dans son mouvement, ou au sinus verse de l'arc qu'il décrit qui est le rayon lui-même, & dans ce cas le Pendule décrira une demi-circonference s'il fait ses oscillations lateralement, ou une circonference parallele à l'horizon si on lui a imprimé un mouvement pour le faire décrire la surface d'un Cone, car FN sera la longueur du Pendule. Enfin si x est moindre que $\frac{1}{2}a$, ce Pendule fera ses révolutions autour du point A, & cela plus ou moins selon que x sera plus petite que $\frac{1}{2}a$.

Voilà donc deux belles proprietez de la Parabole qui n'avoient peut-être point été remarquées, dont la premiere, est que si du foyer on décrit une infinité de portions de circonferences qui ſe terminent à ſon axe & à ſa courbure, elles ſeront parcouruës en tems égaux par un Pendule qui aura ſon point de ſuſpenſion au foyer. Et la ſeconde, c'eſt que tous ces arcs ont des ſinus verſes égaux. Et il m'a paru que ç'auroit été un Probleme difficile à réſoudre, s'il avoit été propoſé de cette ſorte: Une infinité de portions de circonferences concentriques étant données, trouver la Courbe qui les coupe de maniere qu'un mobile ſuſpendu les parcoure toutes en tems égal. Ou bien une infinité d'arcs concentriques étant donnez, trouver la Courbe qui les coupe, enſorte que tous leurs ſinus verſes ſoient égaux. Et ce qu'il a de remarquable, c'eſt que tous ces ſinus verſes ſont non-ſeulement toûjours égaux entr'eux, mais ils ſont auſſi égaux à une grandeur conſtante qui eſt la moitié du parametre, ou à l'ordonnée menée du foyer, ce qui ſe peut démontrer ainſi.

Soient du foyer F décrits deux arcs quelconques BN, KQ, il eſt clair que $BF = FN$ rayon & ſinus verſe de l'arc AN, ce qu'on a appellé a; il faut donc prouver que $EK = a$: Soit $EF = z$, mais FK par la generation $= ED = EF + FB = z + a$, donc $EK = FK - EF$ ou $ED - EF = z + a - z = a$; donc, &c. Ce qui doit toûjours arriver par la proprieté de la Parabole & du cercle; car l'on ſçait que pour mener une perpendiculaire à la Courbe, il faut toûjours prendre la soû-perpendiculaire égale au demi-parametre, & alors la corde menée de K en Q ſera perpendiculaire ſur la Courbe, donc l'autre corde du demi-cercle décrit du centre F ſera la tangente. Voilà donc une nouvelle maniere ſimple & facile de mener des tangentes à la Parabole. Car décrivant du foyer F comme centre un demi-cercle qui coupe la Parabole en un point, ſi de ce point l'on mene deux cordes qui ſe terminent aux extrémitez du diametre, il eſt évident que l'une ſera tangente, & l'autre perpendiculaire à la Courbe.

L'on pourroit encore découvrir la nature de cette Courbe en cette ſorte. Les mêmes choſes étant poſées, on trouvera à cauſe du triangle rectangle APM, que

$yy = xx$

$yy = xx - xx + 2ax - aa = 2ax - aa$, qui eſt la même équation que cy-deſſus. C'eſt ainſi que M. Lichtſcheid l'a déterminée. Fig. II

L'on pourroit conclure de la ſolution de ce Problême le plus beau Theoreme de M. Hugens ſur les forces centrifuges, qui eſt qu'un corps ſe mouvant circulairement dans la ſurface d'un Conoïde parabolique, décrit toutes les circonferences qui compoſent cette ſurface en tems égaux. L'on en peut voir la démonſtration dans les élegantes ſolutions qu'ont données M. le Marquis de l'Hôpital, & M. Saurin des Theoremes de la force centrifuge.

L'on pourroit démontrer d'une maniere ſimple & facile qu'un Pendule étant mis dans une ſituation horizontale, enſorte qu'on lui faſſe décrire des cercles paralleles à l'horizon, & qu'on l'allonge inſenſiblement & ſucceſſivement, ce Pendule étant porté en bas par ſa peſanteur, tandis qu'il continuë de faire ſes révolutions, il décrit une Parabole.

Car par ſa force cintrifuges il eſt porté par un mouvement horizontal & uniforme, puiſqu'on ſuppoſe qu'il fait toutes ſes révolutions en tems égaux, mais ſon poids le porte en bas par un mouvement acceleré. Donc, &c.

L'on pourroit encore conclure de ce qu'on vient de dire quelques proprietez de la Parabole. 1°. Que toutes ſes perpendiculaires étant regardées comme des plans inclinez, ſeroient parcouruës par des corps égaux en des tems qui ſont entr'eux en même raiſon que ces perpendiculaires, ou ce qui revient au même, en raiſon des racines quarrées des lignes menées du foyer aux points où ces perpendiculaires coupent la Parabole : car il eſt démontré que ſi un corps parcourt des plans inégaux de même hauteur, les tems qu'il emploïe à les parcourir ſont en même raiſon que les longueurs de ces plans. 2°. Que ces corps en parcourant ces perpendiculaires aquierent la même vîteſſe ; car l'on ſçait que la vîteſſe qu'un corps acquiert en deſcendant le long d'un plan incliné, eſt égale à celle qu'il acquiert en parcourant la hauteur de ce plan.

OBSERVATIONS
SUR LA NAISSANCE
ET SUR LA CULTURE DES CHAMPIGNONS.

PAR M. TOUNEFORT.

1707. 2. Mars.

LA maniere dont on éleve les Champignons à Paris, favoriſe la penſée de ceux qui croïent que les Champignons naiſſent de graine de même que les autres plantes. Pour faire d'excellentes couches à Champignons, c'eſt à dire des couches qui produiſent beaucoup de Champignons dont les ſaiſons de l'année que l'on ſouhaite, il faut emploïer du fumier de cheval qui ſoit mêlé avec un peu de littiere, & par conſéquent où il y ait beaucoup plus de crotes de cheval que de paille, tel qu'eſt le fumier que l'on trouve dans les écuries des loüeurs de carroſſes, où l'on épargne plus la littiere que dans les autres écuries. Les Jardiniers ont obſervé que les Champignons les meilleurs & les plus blancs naiſſent du fumier des chevaux qui ſont nourris de paille de Froment & d'Avoine en grain. Les Champignons noirâtres viennent, à ce qu'ils prétendent, ſur le fumier des chevaux à qui on donne du ſon & de la paille de ſeigle.

Pour avoir des Champignons pendant toute l'année, on fait à Paris deux ſortes de couches. Les unes dans les jardins, & les autres à la campagne. Celles des jardins donnent des Champignons depuis la Touſſaints juſques à la fin d'Avril, & celles de la campagne en produiſent depuis le mois de May juſqu'aux premieres gelées. Ces couches coûtent beaucoup de dépenſe & demandent de grands ſoins; mais auſſi rendent-elles conſiderablement dans de