Cet homme étoit assoupi sans pouvoir dormir, parceque son cerveau faisant peu d'esprits, les fibres nerveuses des organes des sens n'étoient que foiblement tenduës, d'où venoit la disposition qu'il avoit au sommeil. Il ne dormoit cependant pas, à cause que ce peu d'esprits étant toûjours agités par la douleur, empêchoient que les fibres nerveuses de ces organes ne se relâchassent jusqu'au point necessaire pour le sommeil.

La substance du cerveau étant fortement pressée entre l'air & la lymphe contenus dans les ventricules & entre la pie & la dure-mere, les esprits animaux s'y filtroient & s'y distribuoient avec peine, & couloient en petite quantité dans les autres parties du corps, pendant que la douleur en faisoit d'ailleurs une dissipation continuelle. D'où s'est ensuivi la stupidité, l'abbatement, la langueur, la défaillance, & enfin la mort, lorsque les esprits n'ont pû suffire aux mouvemens qui sont absolument necessaires à la vie.

THEORIE DES PROJECTIONS

OU

DU JET DES BOMBES

Selon l'hypotese de Galilée.

PAR M. GUISNÉE.

1707. 11. May.

CE n'est point une Theorie absolument nouvelle des Projections que je propose ici. C'est une Theorie plus étenduë & démontrée plus simplement qu'elle ne l'est dans le Livre de l'Art de jetter des Bombes de *M. Blondel*, & ailleurs.

PROPOSITION I.

THEOREME.

1. *Un corps jetté ſelon une direction quelconque, parallele, ou oblique à l'horizon, décrit par ſon mouvement une Parabole.*

DEMONSTRATION.

Suppoſons qu'un corps tombe de B en A perpendiculairement à l'horiſon, & qu'étant arrivé en A il change ſa direction vers D, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'un corps ſe meuve de A vers D, avec la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant de B en A, il parcourra ſelon AD les eſpaces égaux AC, CH, &c. dans des temps égaux. Mais ſa peſanteur le fera approcher de l'horizon, ou, ce qui revient au même, l'éloignera de la ligne AD de la longueur de la ligne CO au premier temps, de la ligne HM au ſecond, &c. enſorte que les lignes CO, HM, &c. ſeront entr'elles comme les quarrés des temps employés à les parcourir. Nommant donc AB, a; AH, y; HM, x; le temps par AB, t; le temps par AH, ou par HM, (car le temps par HM eſt égal aux temps par AH) θ. Parceque ſi un corps étant tombé de B en A remontoit uniformément avec la vîteſſe acquiſe en A, il parcourroit dans un temps égal à celui de ſa chute de B en A un eſpace double de AB, l'on aura par les loix des mouvemens uniformes $2a\,(2AB) . y\,(AH) :: t . \theta$. Mais par les loix des mouvemens accelerés $\sqrt{a} . \sqrt{x} :: t . \theta$; donc $2a . y :: \sqrt{a} . \sqrt{x}$, d'où l'on tire $4ax = yy$, qui eſt une équation à la Parabole, dont AP prolongement de BA eſt un des diametres; $4a = 4AB$ le parametre du diametre AP; MP parallele à AD, une des ordonnées au diametre AP. FIG. I.

DEFINITIONS.

2. La ligne AD eſt appellée ligne de *direction*; le point A, le point de *projection*; l'angle BAD, l'angle de *l'incli-*

naison du jet; la ligne *AM* menée du point *A* au but *M*, *l'étenduë* du jet; *AP*, le diametre du jet; son parametre $= 4\,AB$, le parametre de projection du jet; la ligne *HM*, la ligne de *chute respective*.

COROLLAIRE I.

3. L'équation $4ax = yy$ fait voir que le parametre du jet $= 4\,AB$, la ligne du jet *AH* & la ligne de chute respective *HM* sont en proportion continuë.

COROLLAIRE II.

4. Il est clair que la ligne de direction *AH* touche la Parabole au point *A*: car la pesanteur du mobile l'éloigne de *AH* dés le premier instant de la projection.

COROLLAIRE III.

5. Il est manifeste que si la ligne de direction *AH* étoit horizontale ou perpendiculaire au diametre *AP*, *AP* seroit l'axe de la Parabole.

COROLLAIRE IV.

6. Il suit aussi que puisque (*num.* 1.) *AB* est le quart du parametre du diametre *AP*, la ligne *BE* menée par *B* perpendiculaire à *AB* sera la ligne generatrice de la Parabole *AOM*, c'est à dire, que toutes les lignes comme *OG* paralleles *AB* & *AB* elle-même, menées de la Parabole jusqu'à la ligne *BE*, sont égales à la distance des points *O* & *A* au foyer de la Parabole.

COROLLAIRE V.

FIG. II. *Cette Figure & les suivantes peuvent être regardées comme une seule.*

7. D'où il suit que si du centre *A* & du rayon *AB* l'on décrit un demi-cercle *BQL*, sa circonference *BQL* sera le lieu des foyers de toutes les Paraboles décrites par un mobile jetté du point *A* avec la vîtesse acquise en tombant de *B* en *A*, selon toutes les positions possibles de la ligne de direction *AD*. Et parceque (*art.* 4.) la ligne de

direction *AD*, quelque position qu'elle ait, touche la Parabole en *A*, si l'on fait l'angle *DAF* égal à l'angle *DAB*, le point *F* où *AF* coupe le demi-cercle *BQL* sera le foyer de la Parabole ; & partant la ligne *OFH* menée par *F* parallele à *AB* en sera l'axe, dont le sommet sera *I* milieu de *FH*, & dont le parametre sera 4 *FI*, ou 4 *IH*.

COROLLAIRE. VI.

8. Puisque *AD* touche la Parabole *AI* en *A*, si l'on mene *IG* parallele à *BE* qui rencontre *AD* en *D*, par la proprieté de la Parabole *IG* sera coupée en deux également en *D* & la ligne *FB* menée du foyer *F* au point *B* passera par le point *D*, & l'ongle *ADB* sera droit ; & partant si l'on décrit un demi-cercle sur le diametre *AB*, il passera par le point *D*. C'est pourquoi si l'on mene l'horizontale *AK* qui rencontre l'axe *IO* en *O* & la Parabole *AI* en *K*, *AK* sera quadruple de *GD* ou de *DI*; mais *GD* est le sinus du double de l'angle d'inclinaison *BAD*; c'est pourquoi les amplitudes horizontales sont entr'elles comme les sinus du double des angles d'inclinaison.

COROLLAIRE VII.

9. Il est encore évident que toutes les Paraboles *AIK* auront pour generatrice commune la droite *BE*; puisque l'on suppose qu'elles sont toutes décrites par un mobile avec la vîtesse acquise en tombant de *B* en *A*.

COROLLAIRE VIII.

10. L'on voit aussi en supposant que l'angle *BAD* n'excede pas 45 degrés, 1°. Que plus cet angle sera aigu, plus les points *F*, *I*, *H*, s'approcheront l'un de l'autre & de la ligne *AB*, & plus l'amplitude horizontale *AK* diminuëra ; de sorte que lorsque *AD* se confondra avec *AB*, la Parabole *AIK* deviendra la verticale *AB*, le jet se fera de *A* en *B*, & le mobile retombera en *A*. Au contraire, plus l'angle *BAD* approchera de 45 degrés, plus l'axe

IO s'éloignera de AB, & plus l'étenduë horizontale AK augmentera.

2°. Lorsque l'angle BAD sera de 45 degrés, les points F & O se confondront avec le point Q, où le demi-cercle BQL coupe l'horizontale AK, & où par consequent l'axe IO qui devient SQ touchera le demi-cercle, le point I qui devient S & qui est le sommet de la Parabole sera au milieu de HO, qui devient hQ, le point G sera en C centre du demi-cercle BDA, le point D en T milieu de BDA, l'amplitude AK deviendra Ak égale à $2AF = 2AB = 4CT$, qui est la plus grande amplitude horizontale où un mobile puisse être jetté avec une vîtesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de B en A, & AB sera double de hS, ou de son égal SQ.

3°. Lorsque l'angle BAD excedera 45 degrés, & à mesure qu'il augmentera depuis 45 degrés jusqu'à 90, les Paraboles deviendront plus ouvertes ; mais elles ne couperont pas pour cela l'horizontale AK en des points d'autant plus éloignés de A, au contraire elles la couperont en des points d'autant plus prés de A que l'angle BAD approchera de 90 degrés ; car plus l'angle BAD approchera du droit, plus le point F s'éloignera de Q dans la circonference QfL, & par consequent plus l'axe HO s'approchera de AB. De sorte que les deux Paraboles qui auront leurs foyers, F, f dans le même axe IO aux points où il coupe le demi-cercle BQL, couperont l'horizontale AK en un même point K. Et comme la Parabole qui a pour foyer le point f a pour sommet le point i milieu de fH, il suit que $Oi = HI$: car fi ou $OF + Oi = Hi = OF - Oi + 2HI$, & partant $OF + Oi = OF - Oi + 2HI$, ou $OF + 2Oi = OF + 2HI$; donc $Oi = HI$. Et par consequent (ayant mené idg parallele à BE) $Ag = BG$, l'arc Ad = l'arc BD, l'arc $dT = DT$, & l'angle $dAT = DAT$; de sorte que les deux Paraboles qui passent par un même point K de l'horizontale, sont celles qu'un mobile décriroit étant jetté selon deux directions AD, Ad également éloignées de 45 degrés au-dessus

deſſus & au-deſſous, c'eſt à dire, lorſque les points D & d ſont également éloignés de T; & lorſque les deux points D & d ſe confondent avec le point T, les deux Paraboles ſe confondent en une ſeule qui rencontre l'orizontale au point le plus éloigné de A qui le puiſſe être dans l'hypothêſe preſente, comme on a déja vû.

4°. Si l'angle BAD eſt droit, ou ce qui eſt la même choſe, ſi AD ſe confond avec AK, le foyer F ſera en L, & le ſommet de la Parabole ſera en A, où la ligne de direction qui eſt alors l'horizontale la touche.

5°. Lorſque l'angle BAD excede 90 degrés, les Paraboles rencontreront l'horizontale AK prolongée du côté de A de la même maniere qu'elles la rencontroient du côté de K lorſque l'angle BAD étoit aigu, & les Paraboles décrites par un mobile du côté de K, ſeront des parties de celles qu'il décriroit du côté oppoſé en prenant les prolongemens de AD pour les lignes de direction.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

II. *Trouver quelle eſt la Courbe ſur laquelle ſe trouvent les ſommets de toutes les Paraboles décrites par un mobile jetté avec la même force ſuivant toutes les directions poſſibles.*

SOLUTION.

Ayant ſuppoſé le Problême réſolu & les mêmes choſes que dans la Propoſition précedente, ſoit AIK une des Paraboles décrites par un mobile jetté du point A ſelon la direction AD avec la force ou la vîteſſe acquiſe en tombant de B en A; I, le ſommet de la Parabole AIK; BE, la ligne generatrice; F, le foyer. FIG. III.

Le point I étant (*hyp.*) un de ceux de la Courbe qu'on cherche, ſoient menées HIO parallele à AB, & IG parallele à BE, en nommant la donnée AB, ou OH, a; & les inconnuës AO, ou GI, x; AG, ou OI, y; BG, ou HI ſera, $a-y$; & partant le parametre de l'axe IO ſera,

$4a - 4y$; & l'on aura par la proprieté de la Parabole $4a - 4y \times IO = AO^2$, ou en termes algebriques $4ay - 4yy = xx$, qui montre que la Courbe cherchée est une Ellipse dont le petit axe est AB ; le centre C milieu de AB ; & le grand axe double du petit, c'est à dire, que si l'on mene du centre C la ligne CS parallele à BE & $= AB = a$, elle sera la moitié du grand axe.

COROLLAIRE.

12. Il est aisé de déduire de l'Equation à l'Ellipse tout ce que nous avons dit dans l'article 10. Car, 1°. L'on en tire $y = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa - xx}$, qui montre que y a deux valeurs positives OI, Oi lorsque $x < a$, & que par consequent l'Ellipse $BIiA$ rencontre la ligne OH en deux points I & i également éloignés de CS, qui sont les sommets des deux Paraboles AIK, AiK qui rencontrent l'horizontale AK dans un même point K.

2°. Lorsque $x = a = AQ = AB$, y n'ayant qu'une valeur $QS = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}AB$, il n'y a qu'une seule Parabole qui rencontre l'Ellipse en S milieu de Qb où la même Qb la touche, & cette Parabole a pour axe la ligne QS, pour sommet le point S, pour foyer le point Q, & est celle qui rencontre l'horizontale au point le plus éloigné de A qu'il est possible. Telle est la Parabole ASk.

3°. Lorsque $x > a = AQ$, $y = Oi$ ne rencontre point l'Ellipse. Ainsi il n'y a aucune Parabole qui rencontre l'horizontale en un point plus éloigné de A, que celui où la Parabole qui a pour sommet le point S la rencontre.

4°. Lorsque $x = o$, c'est à dire, lorsque le point O tombe en A, l'équation précédente devient $y = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a$; donc $y = a$ & $y = o$, qui montre que la Parabole AIK devient la verticale AB, & la Parabole AiK devient la Parabole AV, qui a pour sommet le point A, & pour axe la droite AP.

PROPOSITION III.

PROBLEME.

13. *Trouver la Courbe sur laquelle se trouvent tous les points d'intersection* M *des Paraboles* AIK, *avec les droites* AFM *tirées du point de projection* A *par leurs foyers* F, *& prolongées jusqu'à la rencontre des Paraboles en* M.

Ayant supposé le Problême résolu & les mêmes choses que dans les Propositions précedentes, puisque le point M est un de ceux que l'on cherche, on menera MR parallele à AB, & ayant nommé la donnée AB, a; & les indéterminées AO, x; OI, y; AR, s; RM, z; OF sera $2y-a$; $IO-MR$, $y-z$; & OR, $s-x$, & l'on aura à cause des triangles semblables AOF, ARM, x (AO). $2y-a$ (OF) : : s (AR) z (RM), d'où l'on tire $xy = 2sy - as$, ou FIG. IV.

$$A. \quad x = \frac{2sy - as}{z}, \text{ \&}$$

$$B. \quad xx = \frac{4ssyy - 4assy + aass}{zz}.$$

Par la proprieté de la Parabole, l'on a, y (IO). $y-z$ $(IO-MR)$: : xx (AO^2). $ss-2sx+xx$ (OR^2), d'où l'on tirera

$$C. \quad xx = \frac{2sxy - ssy}{z},$$ qui est une Equation commune à toutes les Paraboles AIK.

L'on a aussi l'Equation du Problême précedent

$$D. \quad xx = 4ay - 4yy.$$

Mettant presentement dans l'Equation C pour x & pour xx leurs valeurs prises dans les Equations A & B, l'on en tirera

$$E. \quad y = \frac{aa}{2a - z}.$$

Et mettant cette valeur de y dans l'Equation A, l'on aura

$$F. \quad x = \frac{as}{2a - z}.$$

Enfin mettant dans l'Equation D pour y, pour yy &

pour xx leurs valeurs prises dans les Equations E & F, l'on en tirera celle-ci :

$G.\quad 4aa - 4az = ss.$

Qui fait voir que la Courbe cherchée est une Parabole, dont le parametre est $4a = 4\,AB$, l'axe AB, le sommet B, & le foyer A.

14. Si l'on fait $z = o$, l'on aura $s = 2a$; ce qui fait connoître que la Parabole BM coupe l'horizontale AK en un point k qui détermine la plus grande amplitude horizontale qui est celle de la Parabole ASk, comme l'on a déja vû art. 10. & 12. num. 2.

COROLLAIRE.

15. L'on tire de l'Equation E, $z\,(RM) = \frac{2ay - aa}{y}$, qui fait voir que RM est positive lorsque $y > \frac{1}{2}a$, comme on a supposé en faisant le calcul; negative lorsque $y < \frac{1}{2}a$; $= o$ lorsque $y = \frac{1}{2}a$.

PROPOSITON IV.

THEOREME.

16. *Les mêmes choses que dans la Proposition précedente étant supposées, je dis que la Parabole* BMk *touche toutes les Paraboles* AIK *au point* M *qui leur est commun.*

Il faut prouver que la soûtangente est commune aux deux Paraboles BMk, AIK, les tangentes étant tirées par le point commun M.

DEMONSTRATION.

Selon la seconde Section de l'Analyse des Infiniment petits, la soûtangente commune aux deux Paraboles AIK, BMk qui répond aux tangentes menées par le point M est $\frac{sdz}{ds}$.

L'équation G $4aa - 4az = ss$ qui appartient à la Parabole BMk étant differentiée donne $= 2adz = sds$, &

partant $dz = \frac{sds}{-2a}$; & mettant cette valeur de dz dans la formule $\frac{sdz}{ds}$, l'on aura $\frac{ss}{-2a}$ pour l'expreſſion de la soûtangente de la Parabole BMk délivrée des Infiniment petits.

L'Equation C, $zxx = 2sxy - ssy$ qui eſt commune à toutes les Paraboles AIK étant differentiée, en prenant x & y pour conſtantes pour la déterminer à une ſeule Parabole AIK, donne $xxdz = 2xyds$, d'où l'on tire $dz = \frac{2xyds - 2ysds}{xx}$; & ayant ſubſtitué cette valeur de dz dans la formule $\frac{sdz}{ds}$, l'on aura $\frac{2xys - 2yss}{xx} = \frac{xs - ss}{2a - 2y}$, en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$ tirée de l'Equation C.

L'on tire de l'Equation E, $z = \frac{2ay - aa}{y}$; & mettant cette valeur de z dans l'Equation F, l'on en tirera $x = \frac{sy}{a}$; & cette valeur de x étant ſubſtituée dans la derniere soûtangente $\frac{xs - ss}{2x - 2y}$, l'on aura $\frac{ssy - ass}{2aa - 2ay} = \frac{ss}{-2a}$. Et comme cette soûtangente eſt la même que celle que nous venons de trouver pour la Parabole BMk, il ſuit que la tangente eſt auſſi la même, & par conſequent que ces deux Paraboles ſe touchent au point M. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

17. Il eſt clair que la Parabole BMk renferme dans ſa concavité toutes les Paraboles AIK, puiſqu'elle les touche toutes au point M où la ligne AFM tirée du point de projection A par leurs foyers F les rencontre, & qu'elle eſt par conſéquent le terme au-delà duquel un mobile ne peut être jetté du point A ſuivant aucune direction, la vîteſſe de projection étant toûjours égale à celle que le mobile acquierroit en tombant de B en A. De ſorte que ſi l'on détermine un point quelconque M ſur la Parabole BMk, pour pouvoir y chaſſer un mobile avec la vîteſſe acquiſe en tombant de B en A, il le faut

jetter selon une direction telle que la Parabole qu'il doit décrire touche au point *M* la Parabole *BMk*. Or il est clair que cette direction est celle qui divise l'angle *BAM* en deux également.

COROLLAIRE II.

18. L'on voit encore que puisque toutes les Paraboles *AIK* décrites par un même corps jetté avec la vitesse acquise en tombant de *B* en *A*, touchent la Parabole *BMk*, si l'on prend un point quelconque *M* sur la Parabole *BMk*, & qu'on mene la ligne *AM* du point *A* au point *M*, toutes les Paraboles *AIK* rencontreront *AM* entre *A* & *M*, excepté celle dont le foyer sera sur la même *AM* qui touche *BMk* au point *M*. De sorte que les lignes *AM* sont les plus grandes étenduës obliques, de même que *Ak* est la plus grande amplitude horizontale.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

FIG. V. 19. *Une étenduë quelconque* AN *égale ou moindre que la plus grande* AM *qui sont toutes deux sur un même plan incliné au-dessus ou au-dessous de l'horizon* AK *étant donnée de grandeur & de position, trouver l'angle de l'inclinaison du jet afin que les deux Paraboles décrites par un mobile passent par le point N.*

SOLUTION I.

Ayant supposé les mêmes choses que dans les Propositions précédentes, & le Problême résolu ; il est clair (*art.* 7.) que si du centre *A* par *B* l'on décrit le cercle *BFf*, il sera le lieu des foyers de toutes les Paraboles *AIK* décrites par un mobile jetté du point *A* avec la vitesse acquise en tombant de *B* en *A* selon toutes les directions possibles.

Ayant mené par *N* la droite *QNR* parallele à *AB* qui rencontrera *AK* en *Q* & *BH* en *R*, en prenant le point

N pour le point de projection, NR sera le quart du parametre du jet fait avec la vîtesse acquise de R en N. C'est-pourquoy (*art.* 7.) le cercle REf décrit du centre N par R sera le lieu de toutes les Paraboles décrites par un mobile avec la vîtesse acquise en tombant de R en N; & partant les intersections F & f des deux circonferences BFf, RFf seront les foyers des deux Paraboles cherchées; & ayant mené par F & par f les droites HO, hQ, & divisé HF & hf par le milieu en I & i, IO & iQ seront les axes des deux mêmes Paraboles, & les points I & i leurs sommets. Menant presentement les droites IG, ig paralleles à BH qui rencontreront le demi-cercle BDA en D & en d, & les lignes AD, Ad, les angles BAD, BAd seront les angles d'inclinaison qu'il falloit trouver.

20. Si les cercles BFf, RFf se touchent, le Problême n'aura qu'une Solution, & il sera impossible si les deux mêmes cercles ne se rencontrent point. Ce seroit la même chose si le point N étoit au-dessous de AK. Cette Solution est celle que M. de la Hire a donnée dans l'Art de jetter des Bombes de M. Blondel.

SOLUTION II.

21. En supposant encore les mêmes choses, & le Problême résolu: soient nommées les données AB, a; AQ, b; QN, c; & les inconnuës AG ou OI, y; GD ou DI, s; AK sera $4s$; QB, $4s-b$; HI ou BG, $a-y$; & partant le parametre de l'axe OI, $4a-4y$. L'on aura par la proprieté de la Parabole $AQ \times QK = QN \times 4a-4y$, ou en termes algebriques $4bs-bb=4ac-4cy$, d'où l'on tire cette construction. Fig. VI.

Ayant mené BL du point B au point L où le cercle BDA coupe l'étenduë AN, soit $BV=\frac{1}{4}AQ$, l'on menera VDd parallele à BL, qui coupera le cercle BDA au point D & d si le Problême a deux Solutions, qui le touchera en un seul point s'il n'en a qu'une, & qui ne le rencontrera point s'il est impossible. Les lignes AD, Ad

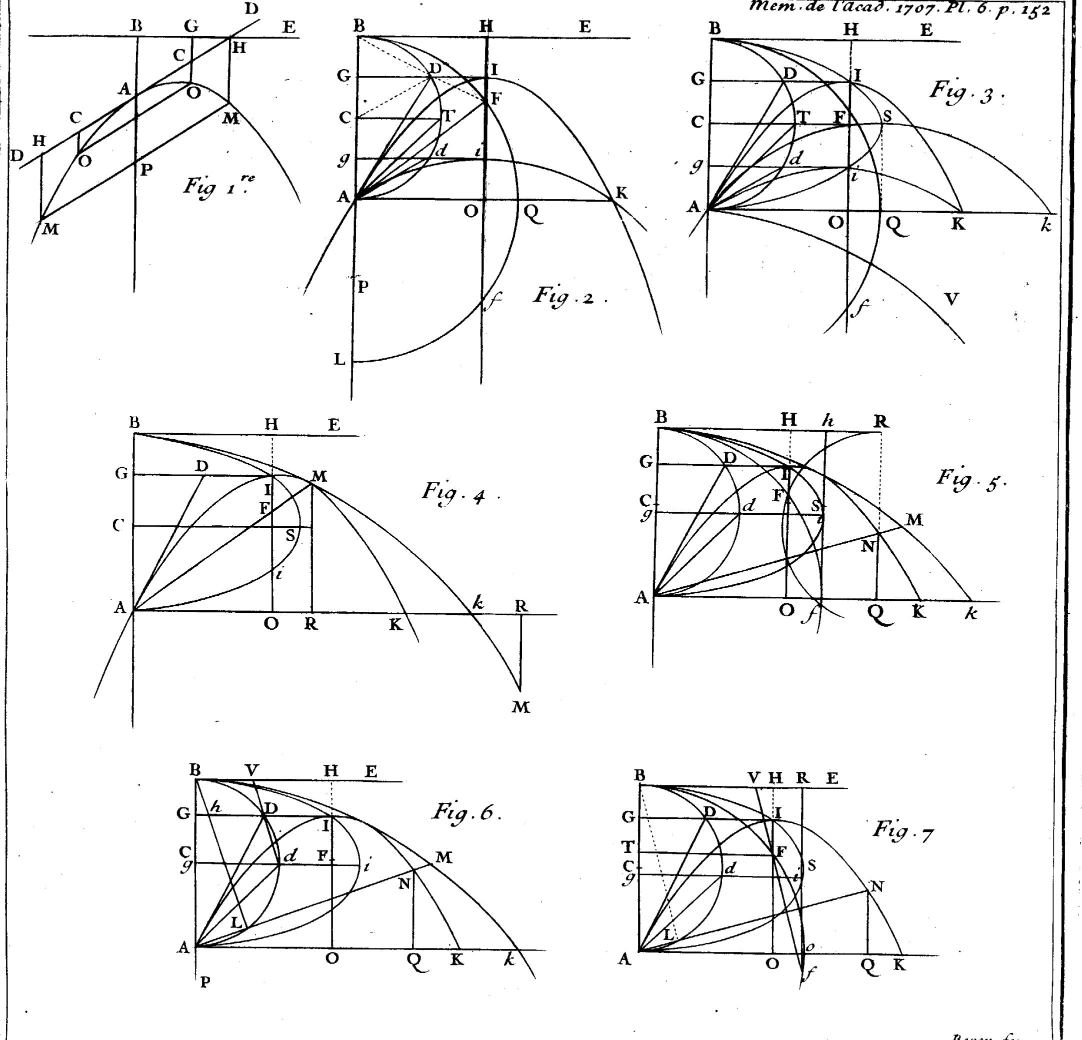
feront les lignes de direction, & les lignes GD, gd étant prolongées en I & i, enforte que $DI = GD$ & $di = gd$, les points I & i feront les fommets des deux Paraboles qui pafferont par le point N, & les angles BAD, BAd les angles d'inclinaifon du jet. Cette Solution a rapport à celle de M. *Buot* abregée par M. *Romer*.

SOLUTION III.

22. Les mêmes chofes étant enfin fuppofées, & le Problême réfolu, fi l'on nomme comme auparavant AB, a; Fig. VII. AQ, b; QN, c; & les inconnuës AO, x; OF, u; HF fera $a - u = \frac{1}{4}$ parametre de l'axe de la Parabole cherchée AIN, & QN fera $2x - b$. L'on aura par la proprieté de la Parabole $AQ \times QK = QN \times 2a - 2u$, ou en termes algebriques $2bx - bb = 2ac - 2cu$ qui donne cette conftruction.

Ayant mené BL du point B au point L où AN coupe le demi-cercle ADB, & fait $BV = \frac{1}{2} AQ$, l'on menera VFf parallele à BL, qui coupera le cercle BFf aux points F, f fi le Problême a deux Solutions, qui le touchera en un feul point s'il n'en a qu'une, & qui ne le rencontrera point s'il eft impoffible. Le Problême ayant deux Solutions, les points F & f feront les foyers des deux Paraboles qui pafferont par le point N; OFH, Rof paralleles à AB, leurs axes; les points I & i qui partagent par le milieu HF & Rf leurs fommets; & les droites IDG, idg paralleles à BE détermineront les angles d'inclinaifon BAD, BAd par leurs interfections D & d avec le cercle BDA.

QUESTION



Berey fec.