Il semble que si une experience comme celle-cy, où non-seulement on rassemble les rayons de la Lune dans une espace 306 fois plus petit que leur état naturel, mais où on les oblige de se croiser en se rassemblant ; ce qui augmente l'effet des ces rayons réünis, comme il est évident en exposant le miroir au Soleil, ne nous montre aucune chaleur apparente, nous devons croire qu'elle ne peut pas faire sur nos corps aucune impression d'une chaleur sensible.

DU MOUVEMENT DES PLANETES SUR LEURS ORBES,

En y comprenant le mouvement de l'Apogée ou de l'Aphelie.

PAR M. VARIGNON.

DAns les Mémoires de 1700. j'ay déterminé les forces centrales ou les pésanteurs nécessaires aux Planetes vers le dedans de leurs Orbes, pour les leur faire décrire dans tous les sistêmes tant anciens que modernes ; & alors je ne considerois que le mouvement de ces Planetes sur les Orbes qu'on leur suppose d'ordinaire. Mais si lon y ajoûte le mouvement de l'Apogée ou de l'Aphelie, en faisant aussi tourner ces Orbes sur quelqu'un de leurs points ; en ce cas le véritable mouvement de chaque Planete emportée par le mouvement circulaire de son Orbe autour de ce point fixe, pendant qu'elle parcourt ce même Orbe, se trouvera composé de ces deux-ci ; & la force centrale de cette Planette vers ce point, propre à lui faire décrire la Courbe qui résulte de cette composition de mouvemens, se trouvera aussi composée de celles que ces deux mouve- 1705. 5. Decembre.

mens séparés requiérent vers ce même point. C'est ce que l'on va voir suivre immédiatement de cette Courbe, qui est la seule que la Planete puisse réellement décrire : La voici, quelque soit l'Orbe supposé de la Planete.

PROBLÊME.

Une Courbe quelconque ALB *étant donnée, dont le plan se meuve de* A *vers* G *autour d'un de ses points* C *fixe sur le plan immobile* RSXZ, *pendant qu'un corps quelconque* L *décrit cet Orbe sur le plan mobile, lequel emportant avec lui ce corps* L, *lui fait réellement tracer une autre Courbe* AHlM *sur le plan immobile* RSXZ : *On demande la nature de cette Courbe* AHlM *formée par cette composition de mouvemens.*

FIGURE I. I. SOLUT. Imaginons l'arc AL tracé par le corps L sur le plan mobile ALB, pendant, que ce plan passe en alb. Il est visible que si l'on fait l'angle $LCl = ACa$, & qu'on prenne $Cl = CL$, le point l du plan fixe $RSXZ$ sera celui où se rencontrera le point L de la Courbe ALB lorsque le plan mobile sera en alb, c'est à dire, le point où sera pour lors le corps L ou le point *décrivant* ; & par conséquent un de ceux de la Courbe $AHlM$ qu'il doit tracer sur le plan immobile $RSXZ$ par le concours de son mouvement suivant ALB sur ce plan mobile ; & de celui de ce plan de A vers G autour de son point fixe C sur le plan immobile RSXZ.

De même le plan mobile ALB étant en alb, si l'on conçoit qu'il continuë de ce mouvoir vers G, & qu'il passe en $\alpha\lambda\beta$ dans le tems que le corps *décrivant* parcourt lf sur ce plan, c'est à dire (en imaginant du centre C par f, l'arc de cercle $\lambda f e FEOP$) dans le tems qu'il auroit décrit LF sur ce même plan, si ce plan fût demeuré en ALB ; & qu'aprés avoir fait l'angle $fc\lambda = aC\alpha$, l'on prenne $C\lambda = Cf$; le point λ du plan fixe $RSXZ$, sera aussi celui où se rencontrera le point f de la Courbe alb, c'est à dire, le point F de la Courbe ALB, lorsque son plan mobile ſera en $\alpha\lambda\beta$: De ſorte que $l\lambda$ ſera la partie de la Courbe $AHlM$, que le point *décrivant* tracera ſur le plan immobile $RSXZ$ dans le tems qu'il tracera lf ou LF ſur le plan mobile alb ou ALB, & que ce plan paſſera de alb en $\alpha\lambda\beta$. Par conſéquent en prenant cette partie lf ou LF de la Courbe donnée alb ou ALB pour infiniment petite, c'eſt à dire les poſitions alb & $\alpha\lambda\beta$ du plan mobile ALB, pour infiniment proches l'une de l'autre; l'on aura $l\lambda$ pour l'élément de la Courbe cherchée $AHlM$.

Si l'on prolonge les arcs circulaires lL & λF juſqu'à la rencontre des rayons Ca & $C\alpha$ en N & en O; l'on aura auſſi NO pour l'élément d'une autre Courbe $AN\mathcal{Q}$, dont la rencontre N ou O avec l'un ou l'autre de ces arcs, déterminera le lieu a ou α de l'Apogée ou de l'Aphelie pour le tems que la Planete ſera en l ou en λ. C'eſt pour cela que cette Courbe s'appellera dans la ſuite *Déterminatrice de l'Apogée* ou *de l'Aphelie*. La précédente $AHlM$ s'appellera l'*Orbe immobile* ou *réelle* de la Planete ; & la donnée ALB, ſon *Orbe mobile* ou *ſuppoſé*.

II. Cette conſtruction donnera de plus les élemens $LE = le$, $EF = ef$, $PO = f\lambda$, de même que les angles $ACa = LCl = FCf$, $LCF = lCf$, $aC\alpha = fC\lambda$.

Donc en nommant AC, h; Aa, x; LC ou FC, r EF ou ef, dz; & $e\lambda$, dy; l'on aura non-ſeulement LE ou $le = dr$; mais encore $\alpha C\ (h).\ OC\ (r) :: a\alpha\ (dx).\ PO$ ou $f\lambda = \frac{rdx}{h}$. Par conſéquent l'équation $dy = dz + \frac{rdx}{h}$, ou $dz = dy - \frac{rdx}{h}$ exprimera la nature de chacune des Courbes $AHlM$ & $AN\mathcal{Q}$, ſelon qu'on y ſubſtituëra la valeur de dx ou de dy, avec celle de dz réſultante en dr de l'équation donnée de l'Orbe mobile ALB.

III. Pour cela il faut conſiderer que puiſque (*hyp*) l'Apogée parcourt $a\alpha$ dans l'inſtant que la Planete parcourt $l\lambda$, ſi l'on ſuppoſe à la maniére de Kepler que les eſpaces ACa, ſont entr'eux comme les tems emploïés par l'Apogée à parcourir les arcs correſpondans Aa, & que les eſpace $AClHA$ ſont auſſi entr'eux comme les tems emploïés par la Planete à parcourir les arcs correfpondans AHl: Cela (dis-je) fuppofé, les élémens contemporains $aC\alpha$, $lC\lambda$, de ces efpaces feront entr'eux en raifon conftante ; par éxemple $aC\alpha\left(\frac{hdx}{2}\right).\ lC\lambda\left(\frac{rdy}{2}\right) :: m.\ n.$ Ce qui donnera $dx = \frac{mrdy}{nh}$, & $dy = \frac{nhdx}{mr}$. Donc en fubftituant fucceffivement ces valeurs de dx, dy, dans l'équation générale $dz = dy - \frac{rdx}{h}$ de l'art. 2. l'on aura $dz = dy - \frac{mrrdy}{nhh} = \frac{nhh-mrr}{nhh} \times dy$, & $dz = \frac{nhdx}{mr} - \frac{rdx}{h} = \frac{nhh-mrr}{mhr} \times dx$ pour les équations fpécifiques des Courbes $AHlM$, ANQ, aprés que l'on y aura auffi fubftitué la valeur de dz réfultante en dr de l'équation donnée de l'Orbe mobile ALB.

IV. Mais antérieurement à cela, & encore en général, l'analogie précédente (*art.* 3.) $\frac{hdx}{2}.\ \frac{rdy}{2} :: m.\ n.$ donnant $dx.dy :: \frac{m}{h}.\ \frac{n}{r}$, l'on aura auffi $\frac{rdx}{h}(OP).\ dy(\lambda e) :: \frac{mr}{hh}.\ \frac{n}{r} :: mrr.\ nhh.$ Donc les élémens contemporains PCO, $eC\lambda$, des efpaces $ACNA$, $AClHA$; & par conféquent auffi ces efpaces contemporains font entr'eux comme mrr eft à nhh.

De plus l'analogie $\lambda e.\ OP :: nhh.\ mrr.$ *donnant* $\lambda e.\ \lambda e - OP\,(FE) :: nhh.\ nhh - mrr.$ l'on aura auffi les efpaces contemporains $AClHA.\ ACLA :: nhh.\ nhh - mrr.$ Donc les trois efpaces contemporains $ACNA$, $AClHA$, $ACLA$, font entr'eux comme mrr, nhh, $nhh - mrr$, le fecond valant les deux autres.

EXEMPLE.

V. Pour faire maintenant quelque ufage de ce que l'on vient de trouver en général, que l'Orbe mobile ALB foit une Ellipfe, dont $AB = a$ foit le grand axe ; & $DC = c$ la diftance de fes foyers C, D ; fon équation (par raport au foyer C) fera $dz = \frac{bdr}{\sqrt{4ar-4rr-bb}}$, en fuppofant $bb = aa - cc$. Si l'on fubftituë cette valeur de dz dans les deux derniéres équations $dz = \frac{\overline{nbb-mrr}}{nbb} \times dy$, $dz = \frac{\overline{nbb-mrr}}{mbr} \times dx$ de l'art. 3. elles se changeront en $\frac{bdr}{\sqrt{4ar-4rr-bb}} = \frac{\overline{nbb-mrr}}{nbb} \times dy$, $\frac{bdr}{\sqrt{4ar-4rr-bb}} = \frac{\overline{nbb-mrr}}{mbr} \times dx$: c'est à dire que $dy = \frac{nbbbdr}{\overline{nbb-mrr} \times \sqrt{4ar-4rr-bb}}$, & $dx = \frac{mbbrdr}{\overline{nbb-mrr} \times \sqrt{4ar-4rr-bb}}$, dont la premiere est l'équation de l'Orbe immobile cherché $AHlM$, & la seconde est celle de la Courbe ANQ déterminatrice du mouvement de l'Apogée.

VI. On a vû dans les Mémoires de 1700. & de 1701. quelles doivent être les pésanteurs ou les forces centrales des Planetes vers un des foyers d'une Ellipse immobile pour la pouvoir décrire : Voici présentement quelles doivent être leur pésanteurs ou forces vers ce foyer C, où l'on suppose que le Soleil est placé, pour décrire comme dans l'art. 1. l'Orbe immobile $AHlM$ par le concours de leur mouvement autour de cette Ellipse, & de celui de cette Ellipse elle-même autour de ce foyer fixe C.

Soient t les tems emploïés par le corps l à décrire cette Courbe $AHlM$. L'on aura (*art.* 3.) chaque instant dt en raison de l'espace élémentaire $lC\lambda \left(\frac{rdy}{2}\right)$ décrit par le rayon Cl pendant cet instant, par exemple, $dt = rdy$ Mais en nommant aussi $l\lambda$, ds; aN, dx $(-dr)$; & f, la force centrale tendante en C : la Regle générale des forces centrales des Mémoires de 1700. pag. 86. & 222. donnera ici $f = \frac{dsdds}{dxdt^2} = \frac{dsdds}{-dudt^2}$, pour cette Regle dans laquelle $lC\lambda \left(\frac{1}{2} rdy\right)$ ou dt doit être constant.

Cela posé, l'équation de la Courbe $AHlM$, trouvée dans l'art. 5. donnant $\frac{\overline{nbb-mrr}^2 \times \overline{4ar-4rr-bb}}{nnbbh^4} \times dy^2 + dy^2 = dr^2 + dy^2 = ds^2$, donnera aussi $\frac{\overline{nnb^4 - 2mnbbrr + mmr^4} \times \overline{4ar-4rr-bb}}{nnbbh^4} + \frac{nnbbh^4}{nnbbh^4} = \frac{ds^2}{dy^2}$ ou $\frac{ds^2}{rrdy^2} \left(\frac{ds^2}{dt^2}\right) =$

$$= \frac{nnh^4 - 2mnbbhrr + mmrr \times 4 \ldots - bb + nnbbb^4}{nnbbb^4 r} =$$

$$= \frac{4nnarh^4 - 4nnrrb^4 - 8mnar^3 bb + 8mnbbr^4 + 2mnbbbbrr}{nnbbh^4 rr}$$

$$\frac{+4mmar^5 - 4mmr^6 - mmbbr^4}{nnbbh^4 rr} =$$

$$= \left\{ \frac{4nnab^4 - 4nnrh^4 - 8mnarrbb + 8mnbbr^3 + 2mnbbbbr + 4mmar^4 - 4mmr^5 - mmbbr^3}{nnbbh^4 r} \right.$$

. Donc en faisant dt constante suivant la Regle, l'on aura $\frac{2dsdds}{dt} =$

$$= \left\{ \frac{\begin{array}{l} -4nnrh^4 - 16mnarrbb + 24mnbbr^3 + 2mnbbbbr \\ +16mmar^4 - 20mmr^5 - 3mmbbr^3 - 4annb^4 \\ +4nnb^4r + 8arrmnbb - 8mnbbr^3 - 2mnbbbbr \\ -4mmar^4 + 4mmr^5 + mmbbr^3 \end{array}}{nnbbb^4rr} \right. \times dr =$$

$$= \left\} \frac{\begin{array}{l} -8mnarrbb + 16mnbbr^3 + 12mmar^4 \\ -16mmr^5 - 2mmbbr^3 - 4annb^4 \end{array}}{nnbbb^4rr} \right. \times dr.$$

Donc enfin $\left\{ \frac{\begin{array}{l} 4mnarrbb - 8mnbbr^3 - 6mmar^4 \\ +8mmr^5 + mmbbr^3 + 2annb^4 \end{array}}{nnbb^4rr} \right. = \frac{dsdds}{-drdt} = f$

qui exprimera la pésanteur ou la force centrale vers C nécessaire à la Planete l pour décrire l'Orbe immobile $AHlM$. *Ce qu'il falloit trouver.*

VII. Si l'on veut maintenant que cette Planete l soit la Terre, & C le Soleil, ou réciproquement : le mouvement annuel de l'Aphelie, ou de l'Apogée se trouvera de 1'. 1". 10'''. suivant le Pere Riccioli dans son Almag. T. 1. Liv. 3. Chap. 25. pag. 158. Donc puisque (*art.* 4.) $nbb.mrr :: \lambda e.OP :: \lambda Ce.OCP$. Et que ces angles instantanés & contemporains sont entr'eux comme leurs sommes annuelles, c'ést à dire ici, comme une révolution entiere de 360. deg. de la Terre autour du Soleil, ou du Soleil autour de la Terre, aux 1'. 1". 10'''. du mouvement annuel de son Aphelie ou Apogée l'on aura $nbbm.rr :: 360. 1' + 1'' + 10''' ::$ $360^d. 3670''' :: 77760000. 3670 :: 21188. \frac{4}{367}. 1.$ ou pour éviter la fraction, $nbb.mrr :: 21188. 1.$ ce qui donne $nbb = 21188\, mrr$. Donc en substituant cette valeur de nbb dans celle qu'on vient de trouver (*art.* 6.) de la force centrale

centrale (f) dont la Planete l doit tendre vers C pour décrire l'Orbe immobile $AHlM$, l'on aura ici . . . $\frac{89794743 4ar - 169496rr + bb}{44893134 4bbr}$, pour une pareille force centrale de la Terre l vers le Soleil C, ou du Soleil l vers la Terre C, ſelon qu'on fera mouvoir la Terre autour du Soleil, ou le Soleil autour de la Terre.

VIII. Une ſemblable ſubſtitution de nhh (*art.* 7.) $= 21188mrr$ dans les équations $dy = \frac{nbhhdr}{nhh - mrr \times \sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, & $dx = \frac{mbhrdr}{nhh - mrr \times \sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, les changera de même en $dy = \frac{21188bdr}{21187r \sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, & $dx = \frac{bhdr}{21187rx \sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, dont la premiére exprimera l'Orbe immobile $AHlM$ de la Terre l autour du Soleil C, ou du Soleil l autour de la Terre C; & la ſeconde exprimera la Courbe ANQ déterminatrice de l'Aphelie de la Terre, ou de l'Apogée du Soleil.

HYPOTHÈSE
DE M. NEWTON.

IX. Voilà ce qui réſulte du mouvement de l'Aphelie ou de l'Apogée a, comparé avec le mouvement effectif de la Planete l ſur ſon Orbe immobile $AHlM$, en ſuppoſant à la maniere de Kepler, que les eſpaces $ACaA$ ſont entr'eux, & les eſpaces $AClHA$ auſſi entr'eux, comme les tems emploïés à les décrire par les rayons correſpondans Ca, Cl. Voici maintenant ce qui réſulte d'une pareille comparaiſon de ce mouvement effectif de la Planete l ſur ſon Orbe immobile $AHlM$, avec celui qu'on ſuppoſe qu'elle a en L ſur ſon Orbe mobile ALB, en ſuppoſant de même à la maniére de Kepler, que les eſpaces $AClHA$ ſont ici entr'eux, & les eſpaces $ACLA$ auſſi entr'eux, comme les tems que les rayons correſpondans Cl, CL, emploïent à les décrire en tournant avec la Planete autour du point fixe C; ce qui rend ici les eſpaces $ACLA$ FIG. I.

en raison constante avec leurs correspondans *AClHA*. Par exemple, $p. q :: ACLA. AClHA :: \int \frac{LC \times EF}{2} . \int \frac{lC \times e\lambda}{2} :: \frac{LC \times EF}{2} . \frac{lC \times \lambda}{2} :: EF. e\lambda ::$ ang. LCF. ang. $l. C\lambda ::$ ang. ACL. ang. ACl. c'est à dire que l'angle ACL est à son correspondant $ACl :: p. q.$ ainsi que M. Newton l'a supposé dans son Traité *De Phil. Nat. Princ. Math.* Prop. 44. Cor. 1. pag. 135. Par conséquent aussi $p. q :: EF\ (dz). e\lambda\ (dy)$. Ce qui donne $\frac{pdy}{q} = dz$ pour l'équation de l'Orbe immobile *AHlM* suivant cette hypothêse de M. Newton, en y substituant la valeur de dz résultante de l'équation donnée de l'Orbe mobile *ALB*.

EXEMPLE I.

X. Donc cet Auteur prenant, comme cy-dessus, cet Orbe mobile pour une Ellipse ordinaire, dont le mouvement de l'Aphelie se fait autour de son foyer C où il place le Soleil; & l'équation de cette Ellipse par raport à ce foyer, étant (*art.* 5.) $dz = \frac{bdr}{\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$; l'on aura (*art.* 9.) $\frac{pdy}{q} = \frac{bdr}{\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, ou $dy = \frac{bqdr}{p\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$ pour l'équation de l'Orbe immobile *AHlM* de son hypothêse.

XI. Cette équation fournit le moyen de trouver tout d'un coup les pésanteurs ou forces centrales avec lesquelles la Planete l doit tendre vers C pour décrire l'Orbe que cette équation exprime, sans avoir recours à ce qu'il lui en faudroit vers ce point pour décrire séparément l'Ellipse *ALB*, & séparément aussi pour le mouvement circulaire de cette Ellipse autour de ce point. En effet les noms, l'hypothêse de $dt = rdy$, & la Regle $f = \frac{ds\,dds}{-dr\,dt^2}$, demeurant ici les mêmes que dans l'art. 6. cette équation $dy = \frac{bqdr}{p\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$, ou $\frac{pdy\sqrt{4ar - 4rr - bb}}{bq} = dr$ de l'art. 10. donnera $\frac{4ppar - 4pprr - ppbb}{qqbb} \times dy^2 + dy^2 = dr^2 + dy^2 = ds^2$, ou $\frac{4ppar - 4pprr - ppbb + qqbb}{qqbbrr} = \frac{ds^2}{rrdy^2}\ (hyp.) = \frac{ds^2}{dt^2}$. Donc en fai-

Iant $dt\,(rdy)$ constante suivant la Regle, l'on aura $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{-4ppar+2ppbb-2qqbb}{qqbbr^3} \times dr$; ce qui donne $\frac{2ppar-ppbb+qqbb}{qqbbr^3} = \frac{dsdds}{-drdt^2} = f$ pour l'expression des forces centrales cherchées, c'est à dire, de celles qui sont necessaires vers *C* à la Planete *l* pour décrire l'Orbe immobile *AHlM*.

XII. Ces forces centrales de la Planete *l* aux différens points de la Courbe *AHlM* vers *C*, étant donc ici comme les fractions correspondantes $\frac{2ppar-ppbb+qqbb}{qqbbr^3}$, ou (en multipliant le tout par la fraction constante $\frac{qq}{pp}$) comme $\frac{2a}{bbrr} + \frac{qq-pp}{ppr^3}$; & ce qu'il lui en faudroit vers le même foyer *C* de l'Ellipse *ABC* pour la décrire, étant aussi (*Mem. de* 1700. *pag.* 223.) comme les fractions correspondantes $\frac{2a}{bbrr}$ les différences des forces nécessaires à ce même corps vers *C*, aux points correspondans *L*, *l*, de ces deux Courbes, pour les décrire, seront de même entr'elles comme $\frac{qq-pp}{ppr^3}$, ou comme $\frac{1}{r^3}$ à cause de la fraction constante $\frac{qq-pp}{pp}$, c'est à dire, en raison réciproque des Cubes r^3 ($\overline{Cl}^3$) des distances de la Planete *l* au foyer *C*, ainsi que M. Newton (*Prop.* 44. *pag.* 133. *&c.*) l'a trouvée en prenant $\frac{pp}{rr}$ pour l'expression de la force requise en *L* vers *C* pour décrire l'Ellipse *ALB*, dont le paramétre du grand axe est $= \frac{bb}{a}$; & en trouvant à sa maniére $\frac{pp}{rr} + \frac{qqbb-ppbb}{2ar^3}$ pour ce que la formation de la Courbe *AHlM* en éxige de même au point correspondant *l* vers *C* dans le corps décrivant : Ce qui se déduit des expressions précédentes de ces forces ; puisque $\frac{2a}{bbrr} . \frac{2a}{bbrr} + \frac{qq-pp}{ppr^3} :: \frac{pp}{rr} . \frac{pp}{rr} + \frac{qqbb-ppbb}{2ar^3}$.

XIII. L'on peut encore trouver la même chose en cette sorte. Toutes choses demeurant les mêmes que cy-dessus, soient menées aux points correspondans quelconques *L*, *l*, FIG. II.

des Orbes ALB, $AHlM$, les tangentes LV, lX, qu'elles soient rencontrées en R, S, par les droites FR, λS, tirées d'autres points correspondans F, λ, infiniment proches de ceux-là, & parallelement aux rayons CL, Cl.

Cela posé, il est évident que ces petites lignes RF, $S\lambda$, seront parcouruës en tems égaux en vertu des forces requises vers C pour décrire ces deux Orbes ; puisque (*hyp.*) si l'Ellipse ALB étoit demeurée fixe, la Planete en auroit parcouru l'élément LF dans le même instant qu'elle parcourt effectivement l'élément correspondant $l\lambda$ par le concours de ce mouvement & de celui de cette Ellipse autour de son foyer C. Donc les forces centrales requises en L, l, vers ce point fixe C, pour la description de ces deux Courbes, sont entr'elles comme RF à $S\lambda$. Mais en nommant LF, dv ; & le reste comme cy-dessus art. 2. & 6. on trouvera par les art. 9. & 10. pag. 25. & 26. des Mem. de 1701. que $RF = \frac{dzdrdv^2 + rdv^2ddz - rdzdvddv}{rdrdz}$ sans y rien supposer de constant : De sorte que substituant $ddz = -\frac{dzdr}{r}$ que donne rdz (dt) qu'on suppose ici constant, l'on aura $RF = -\frac{dvddv}{dr}$. On trouvera de même $S\lambda = -\frac{dsdds}{dr}$. Donc en ce cas les forces centrales requises en L, l, vers C pour la description des Orbes ABL, $AHlM$, doivent être entr'elles $:: \frac{dvddv}{-dr} . \frac{dsdds}{-dr}$. Or

10. L'Ellipse ALB ayant $dv^2 = dr^2 + dz^2$, donnera $\frac{dvddv}{-dr} = \frac{drddr + dzddz}{-dr}$ (à cause que son équation $dr = \frac{gdz}{b}$ résultante de l'art. 5. en supposant $g = \sqrt{4ar - 4rr - bb}$, donne $ddr = \frac{dzdg + gddz}{br}$) $= \frac{drdzdg + gdrddz + bdzddz}{-bdr}$ (à cause que $rdz = dt$ constant, donne $ddz = -\frac{drdt}{rr} = \frac{drdz}{-r}$) $= \frac{-rdrdzdg + gdr^2dz + bdrdz^2}{brdr} = \frac{-rdzdg + gdrdz + bdz^2}{br}$ (à cause que la précédente équation de l'Ellipse ALB donne $dz = \frac{bdr}{g}$) $= \frac{-grdrdg + ggdr^2 + bbdr^2}{ggr}$ (à cause que $g = \sqrt{4ar - 4rr - bb}$

donne $dg = \frac{2adr - 4rdr}{\sqrt{4ar - 4rr - bb}} = \frac{\overline{2a - 4r}}{g} \times dr) = \frac{\overline{-2ar + 4rr + gg + bb}}{ggr} \times dr^2$ (à cause de $gg = 4ar - 4rr - bb$) $= \frac{\overline{-2ar + 4rr + 4ar - 4rr - bb + bb}}{ggr} \times dr^2$ $= \frac{2ardr^2}{ggr} = \frac{2a}{gg} \times dr^2$.

2°. L'Orbe immobile $AHlM$ ayant auſſi $ds^2 = dr^2 + dy^2$, donnera de même $\frac{dsdds}{-dr} = \frac{drddr + dyddy}{-dr}$ (à cauſe que ſon équation $dr = \frac{pgdy}{bq}$ réſultante de l'art. 10. en ſuppoſant encore $g = \sqrt{4ar - 4rr - bb}$, donne $ddr = \frac{pdydg + pgddy}{bq}$) $= \frac{pdrdydg + pgdrddy + bqdyddy}{-bqdr}$ (à cauſe que $rdy = dt$ conſtant, donne $ddy = -\frac{drdt}{rr} = \frac{drdy}{-r}$) $= \frac{-prdrdydg + pgdr^2dy + bqdrdy^2}{bqrdr}$ $= \frac{-prdydg + pgdrdy + bqdy^2}{bqr}$ (à cauſe que la précédente équation de l'Orbe immobile $AHlM$ donne $dy = \frac{bqdr}{pg}$) $= \frac{-ppgrdrdg + ppggdr^2 + bbqqdr^2}{ppggr}$ (à cauſe que $g = \sqrt{4ar - 4rr - bb}$ donne $dg = \frac{2adr - 4rdr}{\sqrt{4ar - 4rr - bb}} = \frac{\overline{2a - 4r}}{g} \times dr$) $=$ $= \frac{\overline{-2ppar + 4pprr + ppgg + qqbb}}{ppggr} \times dr^2$ (à cauſe de $gg = 4ar - 4rr - bb$) $= \frac{\overline{-2ppar + 4pprr + 4ppar - 4pprr - ppbb + qqbb}}{ppggr} \times dr^2$ $= \frac{\overline{2ppar - ppbb + qqbb}}{ppggr} \times dr^2$.

Donc $\frac{dvddv}{-dr} \cdot \frac{dsdds}{-dr} :: \frac{2a}{gg} \times dr^2 . \frac{\overline{2ppar - ppbb + qqbb}}{ppggr} \times dr^2$ $:: \frac{2a}{bb} \cdot \frac{2a}{bb} - \frac{pp + qq}{ppr} :: \frac{2a}{bbrr} \cdot \frac{2a}{bbrr} + \frac{qq - pp}{ppr^3}$. Mais on vient de voir que les forces centrales requiſes en L, l, vers le point fixe C, pour la deſcription des Orbes ALB, $AHMl$, ſont ici $:: \frac{dvddv}{-dr} \cdot \frac{dsdds}{-dr}$. Donc ces mêmes forces ſont auſſi entr'elles $:: \frac{2a}{bbrr} \cdot \frac{2a}{bbrr} + \frac{qq - pp}{ppr^3}$. Ce qui donne encore $\frac{qq - pp}{ppr^3}$ pour leurs différences, ainſi qu'on l'a déja trouvé dans l'art. 12.

XIV. Il eſt à remarquer que quoique cette ſeconde maniére de trouver le raport des forces requiſes aux points correſpondans L, l, vers C, pour décrire les Orbes ALB, $AHlM$, donne auſſi ces forces entr'elles comme $2ppar$ à $2ppar - ppbb + qqbb$; on n'en peut pas conclure de même que leurs différences ſoient comme $qqbb - ppbb$; mais ſeulement que ces forces ſont à leurs différences, comme les deux derniers termes de cette analogie ſont à $qqbb - ppbb$ qui eſt la leur. La raiſon de cela vient de ce qce $2ppar$, & $2ppar - ppbb + qqbb$, ne ſont pas (*art.* 12.) les véritables expreſſions de ces forces, mais ſeulement du raport qu'elles ont entr'elles : car aucune de ces forces ne ſuivant le raport d'aucun de ces termes, la différence de ces forces ne doit point ſuivre non-plus le raport de la différence de ces termes; il faudroit pour cela que chacune de ces forces ſuivît le raport de chacun de ces termes, c'eſt à dire, de celui d'entr'eux qui l'exprimeroit.

EXEMPLE II.

XV. Si l'on veut maintenant que le centre C des forces de la Planete l, ſoit auſſi celui de l'Ellipſe ALB, autour duquel cette Ellipſe tourne pendant que la Planete la parcourt, l'on aura $dz = \frac{2aaldr}{\sqrt{\overline{2arr - 2aal} \times \overline{2aal - 2rrl}}}$ pour l'équation au centre de cette Ellipſe, en ſuppoſant ici ſon grand axe $= 2a$, & le parametre de cet axe $= 2l$. Cette valeur de dz étant ſubſtituée dans l'équation générale $dz = \frac{pdy}{q}$ de l'Orbe immobile $AHlM$, réſultante (*art.* 9.) de l'hypothêſe de M. Newton, l'on aura $\frac{pdy}{q} = \frac{2aaldr}{\sqrt{\overline{2arr - 2aal} \times \overline{2aal - 2rrl}}}$, ou $\frac{pdy\sqrt{\overline{2arr - 2aal} \times \overline{2aal - 2rl}}}{2aaql} = dr$. Ce qui donne $ds^2 (dr^2 + dy^2)$ $= \frac{pp \times \overline{rr - al} \times \overline{aa - rr}}{a^3qql} \times dy^2 + dy^2 = \frac{ppaarr - ppr^4 - ppa^3l + pparrl + qqa^3l}{qqa^3rrl}$ $= \frac{ds^2}{rrdy^2}$ (*hyp.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Donc en faiſant dt (rdy) conſtante ſuivant l'hypothêſe, l'on aura $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{2ppaar^3 - 4ppr^3 + 2ppar^3l - 2ppaar^3 + 2ppr^5 + 2ppa^3lr - 2ppar^4l - 2qqa^3r}{qqa^3r^4l} \times dr$ $= \frac{-2ppr^4 + 2ppa^3l - 2qqa^3l}{qqa^3r^3l} \times dr$; d'où réſulte $\frac{ppr^4 - ppa^3l + qqa^3l}{qqa^3r^3l}$ Ce $\frac{dsdds}{-drdt^2} = f$ pour l'expreſſion des forces centrales cherchées, c'eſt à dire, requiſes vers le centre C de l'Ellipſe qu'on ſuppoſe ſe mouvoir autour de ce point, pour décrire (en la parcourant) l'Orbe immobile $AHlM$.

XVI. Ces forces centrales de la Planete l aux différens points de la Courbe $AHlM$ vers le centre de l'Ellipſe ALB, ſont donc ici comme les fractions correſpondantes $\frac{ppr^4 - ppa^3l + qqa^3l}{qqa^3r^3l}$, ou (en multipliant par qql conſtante) comme $\frac{ppr}{a^3} + \frac{qql - ppl}{r^3}$. Mais on a vû dans les Mémoires de 1700. art. 9. pag. 88. que les forces requiſes vers le centre C de l'Ellipſe ALB pour la décrire ſur un plan fixe dans la préſente hypothêſe de M. Newton, ſeroient comme $\frac{2r}{a^3p}$, c'eſt à dire ici comme $\frac{r}{a^3l}$, parceque le parametre $p = 2l$; c'eſt à dire auſſi (en multipliant cette fraction par la grandeur conſtante ppl) comme $\frac{ppr}{a^3}$. De ſorte que $\frac{ppr}{a^3}$ & $\frac{ppr}{a^3} + \frac{qql - ppl}{r^3}$ ſeront les expreſſions de cette force, & de l'autre neceſſaire auſſi vers C à la Planete l pour décrire l'Orbe $AHlM$, ainſi que M. Newton l'a dit dans le Cor. 3. de ſa Prop. 44. pag. 136.

EXEMPLE III.

XVII. M. Newton parle encore d'un autre éxemple qui conſiſte en une Courbe $AHlM$ décrite par le mobile L mû de A vers B le long du côté AB de l'équerre CAB, pendant que cette équerre tourne autour d'un point fixe quelconque C de ſon autre côté AC, de maniére que les eſpaces $ACLA$ ſont encore ici entr'eux, & les eſpaces $AClHA$ auſſi entr'eux, comme les tems emploïés à FIG. III.

les tracer. D'où l'on voit que les espaces contemporains $ACLA$ & $AClHA$ déterminés par l'arc de cercle Ll décrit du centre C, & par conséquent aussi leurs élemens contemporains LCF, $lC\lambda$, ou (ce qui revient au même) les arcs FE, λe, sont encore entr'eux en raison constante, par exemple comme p est à q.

Si l'on veut maintenant trouver les forces centrales requises au corps l vers C, pour décrire d'un seul mouvement la Courbe $AHlM$; soient encore $AC = h$, CL ou $Cl = r$, $FE = dz$, $\lambda e = dy$, $l\lambda = ds$, $t =$ au tems employé à décrire l'arc AHl; lequel tems étant (*hyp.*) par tout comme l'espace correspondant $AClHA$, donne aussi par tout les élemens $lC\lambda$ $\left(\frac{rdy}{2}\right)$ de cet espace comme les instants (dt) emploïés à les parcourir, c'est à dire, dt par tout en raison de rdy, ou $dt = rdy$.

Cela étant, les triangles semblables LAC, LEF, donneront $LC(r) . AC(h) :: LF\left(\frac{rdr}{\sqrt{rr-hh}}\right) . FE(dz) = \frac{hdr}{\sqrt{rr-hh}}$. Mais l'hypothêse précédente de M. Newton donne aussi $q . p :: dy . dz = \frac{pdy}{q}$. Donc on aura $\frac{pdy}{q} = \frac{hdr}{\sqrt{rr-hh}}$, ou $dr = \frac{pdy\sqrt{rr-hh}}{qh}$. Par conséquent $\frac{pprr-pphh}{qqhh} \times dy^2 + dy^2 = dr^2 + dy^2 = ds^2$, ou $\frac{pprr-pphh+qqhh}{qqhhrr} = \frac{ds^2}{rrdy^2}$ (*hyp.*) $= \frac{ds^2}{dt^2}$. Donc en faisant dt (rdy) constante suivant la Regle $f = \frac{dsdds}{-drdt^2}$ de l'art. 6. l'on aura $\frac{2dsdds}{dt^2} = \frac{2ppr^3dr - 2ppr^3dr + 2pphhrdr - 2qqhhrdr}{qqhhr^4} = \frac{2pp-2qq}{qqr^3} \times dr$. Ce qui donne $\frac{qq-pp}{qqr^3} = \frac{dsdds}{-drdt^2} = f$ pour l'expression des forces centrales requises au corps l vers C pour décrire la Courbe $AHlM$. D'où l'on voit que ces forces doivent être par tout en raison réciproque des Cubes des distances de ce corps l au centre C, ainsi que M. Newton l'a dit dans le Corol. 6. de sa Prop. 44. pag. 137.

Remarque.

XVIII. Telle est la facilité avec laquelle la Regle des forces centrales rapportée dans l'art. 6. peut résoudre tous les

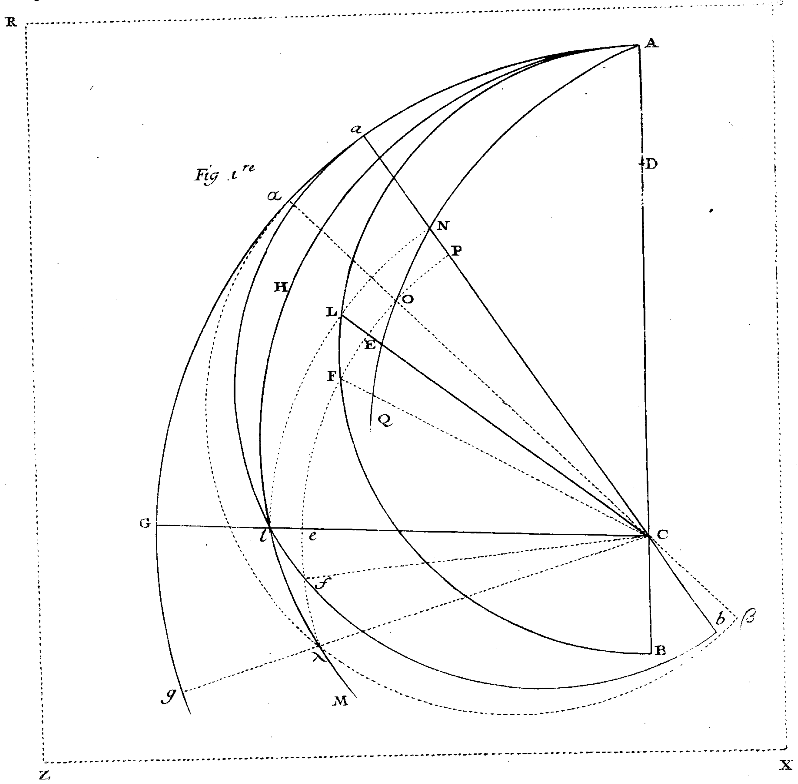

Fig. 1re

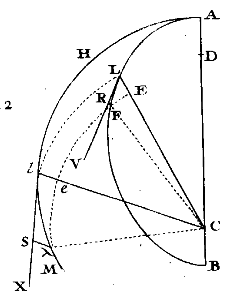

Fig. 2

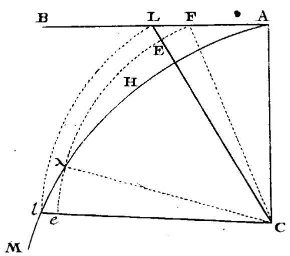

Fig. 3