Degrés de chaleur, extraits des Transactions Philosophiques.

171 p. 2 lig. Degré de chaleur d'un petit brasier allumé, construit de charbon de terre & sans soufflets; ainsi que la chaleur du fer rougi, autant qu'il le peut être dans ce brasier.

176 1 }
181 4 } Degrés de chaleur d'un feu de bois médiocre.

DES COURBES DECRITES

Par le concours de tant de Forces centrales qu'on voudra, placées à discretion entr'elles, & par rapport aux plans de ces mêmes Courbes.

Par M. VARIGNON.

1703. 5. Septemb. MOnsieur Leibnitz ayant appris quelque chose de ce que j'ai donné jusqu'ici à l'Académie touchant les Forces centrales, & l'application que j'en ai faite aux différens Systêmes d'Astronomie, m'exhorta il y a quelque tems à poursuivre cette Théorie, principalement par rapport aux Courbes décrites par le concours de plusieurs de ces forces; *étant* (dit-il) *apparent que les Planetes agissent l'une sur l'autre*, & qu'ainsi elles décrivent peut-être leurs orbes en tendant non seulement au Soleil, mais encore les unes vers les autres. Quoi qu'il en soit, voici ce que j'ai encore trouvé par rapport à ce sujet.

PROBLEME GÉNÉRAL.

FIG. I. II. *Soit une Courbe quelconque* ZLM *décrite par le corps* L *mû suivant* LM *par le concours de tant de Forces centrales qu'on voudra, qui le tirent toutes à la fois vers leurs centres fixes* A, B, D, E, F, *&c. placés à discretion dans le plan de* *cette Courbe, ou dans des plans différens. On demande quelque Regle de toutes ces Forces centrales.*

SOLUTION.

Ce Problême a deux cas : Le premier, lorſque les centres fixes ou foyers des Forces ſuppoſées, ſont tous dans le plan de la Courbe *ZLM*; Et le ſecond, lorſqu'ils ſe trouvent dans des plans différens.

I. *Premier cas.* Soient donc d'abord dans le plan de la Courbe *ZLM*, tous les foyers *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, &c. des forces de ces mêmes noms, par le concours deſquelles on la ſuppoſe décrite. Soient *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *DL*, *Dl*; *EL*, *El*; *FL*, *Fl*; &c. les *Rayons de traction* de ces forces, conduits de leurs centres ou foyers *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, &c. aux extrémités *L* & *l* d'un des Elémens *Ll* de la Courbe *ZLM*. Et après avoir fait de ces mêmes centres les arcs élémentaires des cercles, *Hl*, *Gl*, *KL*, *VL*, *Tl*, &c. ſoient les droites *HQ*, *GO*, *KS*, *VP*, *TR*, &c. perpendiculaires ſur *Ll*. Soient de plus *A*, *B*, *D*, *E*, *F*, &c. les noms de ces forces centrales variables à diſcretion. FIGURE I.

II. Cela poſé, il eſt manifeſte que l'on aura $Ll, Hl :: LH. QH :: A$ (force ſuivant *LA*). $\frac{A \times Hl}{Ll}$ force ſuivant *QH*. On trouvera de même $\frac{B \times Gl}{Ll}$, $\frac{D \times KL}{Ll}$, $\frac{E \times VL}{Ll}$, $\frac{F \times Tl}{Ll}$, &c. pour ce que les forces centrales *B*, *D*, *E*, *F*, &c. en donnent auſſi au corps *L* ſuivant *OG*, *SK*, *PV*, *RT*, &c. C'eſt-à-dire, pour ce qu'elles lui en donnent tout à la fois vers le dedans & vers le dehors de la Courbe *ZLM* perpendiculairement à ſon élément *Ll*, ſelon qu'elles tendent du côté de la concavité ou de la convexité de cette même Courbe. Donc en retranchant ce que ce corps *L* en reçoit vers le dehors, de ce qu'il en reçoit vers le dedans de cette Courbe perpendiculairement à *Ll*, l'on aura ici $\frac{A \times Hl}{Ll} + \frac{B \times Gl}{Ll} + \frac{D \times KL}{Ll} - \frac{E \times VL}{Ll} - \frac{F \times Tl}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - F \times Tl \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces centrales lui en donnent enſemble de perpendiculaire à Ll vers le dedans de la même Courbe dans l'inſtant qu'il parcourt cet élément Ll, ſuppoſé qu'elles tendent toutes vers les foyers dont elles portent les noms : ſinon, l'on changera les ſignes de celles qui tendront en ſens contraire ſuivant les mêmes directions prolongées du côté de L.

Or ſi l'on imagine de plus les rayons CL, Cl, de la développée en L, l, de cette Courbe ZLM, avec ſa touchante LI en L, perpendiculaire à LC ; & du centre L l'arc de cercle lN qui la rencontre en N : On trouvera que Nl eſt préciſément ce que la force perpendiculaire à Ll, qu'on vient de voir réſulter du concours des forces centrales précédentes, au corps L vers le dedans de cette Courbe, lui fait parcourir en ce ſens dans l'inſtant qu'il paſſe de L en l, & qu'elle le contraint de ſuivre Ll au lieu de LN qu'il ſuivroit ſans cela.

Donc (les eſpaces parcourus en vertu de forces conſtantes & continuellement appliquées, telles qu'on conçoit d'ordinaire la peſanteur, & que le ſont toutes les forces à chaque inſtant, étant en raiſon compoſée de celles de ces forces & des quarrés des tems employés à les parcourir) cet eſpace Nl doit être auſſi comme le produit de cette force par le quarré de cet inſtant : c'eſt-à-dire (en prenant dt pour le nom de cet inſtant) $Nl = \frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - F \times Tl \pm \&c.}{Ll} \times dt^2$.

Mais à cauſe des Triangles ſemblables CLl, LNl, l'on aura $CL . Ll :: Ll . Nl = \frac{Ll \times Ll}{CL}$. Donc enfin $\frac{Ll \times Ll}{CL} = \frac{A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - F \times Tl \pm \&c.}{Ll} \times dt^2$, ou (appellant Ll, ds ; & CL ; n ;) $A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - F \times Tl \pm \&c. = \frac{ds^3}{n\,dt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$. Ce qui ſera une Regle des mouvemens réſultans du concours de tant & de telles forces centrales qu'on voudra, dirigées à autant de points fixes placés à diſcretion ſur un même plan : dans laquelle Regle le rayon CL (n) de la développée doit être pris par rapport à tous les foyers de la question, de la maniere que M. Herman l'a donné dans les Actes de Leipsik au mois de Nov. de 1702. *Ce qu'il falloit premiérement trouver.*

III. *Second cas.* Imaginons présentement que les Forces centrales *A, D, F,* &c. n'ont plus leurs foyers dans le plan de la Courbe proposée *ZLM*; mais que *A* (par exemple) soit au dessus, & *D, F,* au dessous de ce plan, dans lequel sont encore *B, E,* &c. De ces foyers *A, D, F,* imaginons des perpendiculaires *AX, DY, FW,* sur ce même plan, lesquelles le rencontrent en *X, Y, W,* par lesquels points soient les droites *XL, Xl, YL, Yl, WL, Wl.* Enfin de ces mêmes points *X, Y, W,* comme centres, soient aussi décrits les arcs élémentaires de cercles, *lH, LK, lT*; & le reste comme ci-dessus art. 1. Fig. 1. FIG. II.

IV. Cela posé, il est visible que l'effort de la Force centrale *A* suivant *LA,* est le même que s'il lui résultoit du concours de deux autres suivant *LX* & *XA,* en même rapport que ces lignes; & que ce qu'elle en fait suivant *XA,* doit être en équilibre contre ce que les forces *D* & *F* en font de même à contre-sens suivant *YD* & *WF,* pour retenir toûjours le corps *L* décrivant dans le plan où l'on suppose la Courbe *ZLM.* Donc tout ce qu'il en reste à la force *A* contre ce corps, se doit faire par tout suivant *LX*: de sorte que le point *X* fera comme le centre ou le foyer de tout ce que la force *A* fera d'effort contre le corps *L* décrivant. On trouvera de même que les points *Y* & *W* seront les foyers de tout ce que les forces *D* & *F* feront d'effort contre ce même corps *L*: Et de cette maniere le corps *L* décrira la Courbe *ZLM* dans le plan *BLE* qu'on lui suppose, par le concours des Forces centrales tendantes aux foyers *A, B, D, E, F,* &c. placés à discretion par rapport à ce plan, de même qu'il la décriroit par le concours d'autant d'autres forces tendantes aux foyers *X, B, Y, E, W,* &c. placés tous dans ce même plan, avec des efforts (que j'appelle aussi *X, B, Y, E, W,* &c.) lesquels fussent aux forces *A, B, D, E, F,* &c. comme leurs rayons *LX, LB, LY, LE, LW,* &c. sont aux rayons *LA, LB,*

LD, LE, LF, &c. de celles-ci; ce qui réduit ce cas-ci au précédent.

Donc (*art.* 2.) l'on aura ici $X \times Hl + B \times Gl + Y \times KL - E \times VL - W \times TL \pm \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$. De plus les efforts ou forces X, B, Y, E, W, &c. étant aux centrales A, B, D, E, F, &c. comme leurs rayons LX, LB, LY, LE, LW, &c. sont à LA, LB, LD, LE, LF, &c. rayons de celles-ci; l'on aura $X = \frac{A \times LX}{LA}$, $B = B$, $Y = \frac{D \times LY}{LD}$, $E = E$, $W = \frac{F \times LW}{LF}$, &c. Donc on aura aussi

$$\frac{AL \times Hl \times LX}{LA} + B \times Gl + \frac{D \times KL \times LY}{LD} - E \times VL - \frac{F \times Tl \times LW}{FL} \pm \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Mais les angles AXL, DYL, FWL, étant (*hyp.*) droits, l'on aura de plus $LX = \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}$, $LY = \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}$, $LW = \sqrt{\overline{LF}^2 - \overline{FW}^2}$. Donc enfin

$$\frac{A \times Hl \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + B \times Gl + \frac{D \times KL \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} - E \times VL - \frac{F \times Tl \times \sqrt{\overline{LF}^2 - \overline{FW}^2}}{LF} \pm \&c. = \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$$

sera la regle des mouvemens résultans du concours de tant de forces centrales A, B, D, E, F, &c. qu'on voudra, placées à discretion hors ou dans les plans des Courbes ZLM qu'on suppose ainsi décrites: Dans laquelle Regle le rayon de la développée doit encore être pris à la maniere de M. Herman, mais par rapport seulement aux foyers (tant réels qu'imaginés) qui sont dans le plan de la Courbe en question, tels que sont ici X, B, Y, E, W, dont la réduction se fera ensuite aux seuls véritables par la substitution des précédentes valeurs de LX, LY, LW, mises en leurs places. *Ce qu'il faloit encore trouver.*

V. *Corol.* 1. Il est clair que lorsque les foyers A, B, D, E, F, &c. sont dans le plan de la Courbe ZLM, comme dans le premier cas du Prob. art. 1. & 2. les perpendiculaires AX, DY, FW, se trouvant nulles, cette Regle se change en $A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - E \times Tl \pm \&c. =$

$= \frac{ds^3}{ndt^2} = \frac{Ll}{CL} \times \frac{ds^2}{dt^2}$, laquelle eſt celle de ce premier cas, art. 2.

VI. *Corol.* 2. En prenant v pour la viteſſe en L du corps L ſuivant Ll, on ſçait d'ailleurs que l'on aura $\frac{vvdt}{n} = \frac{ds^3}{ndt^2}$. Donc on aura encore pour le premier cas (*art.* 2.) $A \times Hl + B \times Gl + D \times KL - E \times VL - F \times Tl \pm$, &c. $= \frac{vvdt}{n} = \frac{Ll}{CL} \times vv$;

Et pour le ſecond cas (*art.* 4.) $\frac{A \times Hl \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + B \times Gl + \frac{D \times KL \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} - E \times VL - \frac{F \times Tl \times \sqrt{\overline{LF}^2 - \overline{FW}^2}}{LF} \pm$, &c. $= \frac{vvdt}{n} = \frac{Ll}{CL} \times vv$.

VII. *Corol.* 3. Si B étoit la ſeule force centrale qui fût ici, alors toutes les autres étant $= o$, l'une & l'autre des Régles des art. 2. & 4. ſe réduiroit ici à $B \times Gl = \frac{ds^3}{ndt^2}$. D'où l'on voit qu'en prenant f pour la force B, ou $B = f$, & $Gl = dx$; cette Régle ſeroit $fdx = \frac{ds^3}{ndt^2}$, ou $f = \frac{ds^3}{ndxdt^2}$, laquelle eſt la même que celle que je donnai à l'Académie le 29 Janvier 1701.

Je ne m'arrête point à faire voir que ce cas d'une ſeule force centrale, la demande néceſſairement dans le plan de la Courbe. Car il eſt manifeſte qu'une telle force hors du plan de la Courbe, tendant à en tirer le corps décrivant, elle l'en tireroit effectivement ſi elle étoit ſeule : ainſi la Courbe que ce corps trace, ceſſeroit d'y être auſſi ; ce qui eſt contraire à l'hypothèſe.

VIII. *Corol.* 4. Préſentement ſi de l'extrémité C du rayon LC de la développée, on fait les perpendiculaires $C\alpha$, $C\beta$, $C\delta$, $C\epsilon$, $C\varphi$, ſur AL, BL, DL, EL, FL, prolongées dans la Fig. 1. & ſur XL, BL, YL, EL, WL; prolongées de même dans la Fig. 2. La ſubſtitution de leurs portions $L\alpha$, $L\beta$, $L\delta$, $L\epsilon$, $L\varphi$, & de LC, au lieu de Hl, Gl, KL, VL, Tl, & de Ll, dans les Régles générales des art. 2. & 4. changera celle de l'art. 2. en $A \times L\alpha +$

$+ B \times L\beta + D \times L\delta - E \times L\epsilon - F \times L\varphi \pm$, &c.$= \frac{LC}{LC} \times \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}$ (Cor. 2.) $= vv$; & celle de l'art. 4. en $\frac{A \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA}$ $+ B \times L\beta + \frac{D \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} - E \times L\epsilon - \frac{F \times L\varphi \times \sqrt{\overline{LF}^2 - \overline{FW}^2}}{LF}$ $\pm$, &c. $- \frac{LC}{LC} \times \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^8}$ (Cor. 2.) $= vv$.

IX. *Corol.* 5. D'où l'on voit que lorſque le mouvement du corps L, qu'on ſuppoſe décrire la Courbe ZLM en vertu des forces centrales tendantes ſuivant des lignes qui paſſent par les foyers A, B, D, E, F, &c. eſt uniforme, ayant alors $ds = dt$, l'on aura auſſi pour lors $A \times L\alpha + B \times L\beta + D \times L\delta - E \times L\epsilon - F \times L\varphi \pm$, &c.$= 1$. pour le premier cas, Fig. 1. Et $\frac{A \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + B \times L\beta + \frac{D \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} - E \times L\epsilon - \frac{F \times L\varphi \times \sqrt{\overline{FL}^2 - \overline{FW}^2}}{FL} \pm$, &c. $= 1$. pour le ſecond cas, Fig. 2.

SCHOLIE I.

X. La maniere de trouver le Rayon de la développée, dont on doit ſe ſervir dans l'uſage des Régles précédentes, conſiſte à le chercher par rapport à chaque rayon des forces AL, BL, DL, EL, FL, &c. pour le premier cas du Prob. art. 1. & 2. Fig. 1. Et par rapport à chaque rayon XL, BL, YL, EL, WL, &c. pour le ſecond cas du Prob. art. 3. & 4. Fig. 2. comme l'on a fait dans le Mémoire du 29 Janvier 1701 pour un ſeul de ces rayons. Après l'avoir trouvé dans les mêmes conditions pour chacun, & lui avoir donné par-tout le même nom, on dégage la ſeconde différentielle dans chacune de ces expreſſions, & l'on en ſubſtitue la valeur en ſa place dans l'équation de la Courbe différenciée juſqu'à ce point; ce qui n'y laiſſe plus que des premieres différences avec le rayon de la développée au premier degré; lequel par conséquent se trouve alors en grandeurs finies & en premieres différences seulement, lesquelles s'évanouissent aussi par la substitution d'autres grandeurs finies qui s'y trouvent proportionnelles, comme dans l'art. 8. ce qui donne le rayon de la développée en grandeurs toutes finies. Voici comment, en faveur de ceux qui n'ont pas le mois de Novembre de 1702 des Actes de Leipsik, où cela se trouve démontré pour le premier des cas précédens, & d'où la même chose se peut tirer sans peine pour le second.

XI. Suivant l'art. 11. du Mémoire du 29 Janvier de 1701, en prenant toujours CL pour le rayon de la développée, d pour la marque ou la caractéristique des différentielles, & de plus Ll par tout constante; l'on aura pour le premier cas du Prob. art. 1. & 2. Fig. 1. FIG. I.

$$\left.\begin{array}{l} CL = \dfrac{AL \times Hl \times Ll}{\overline{Hl}^2 - AL \times ddAL} \\[2ex] CL = \dfrac{BL \times Gl \times Ll}{\overline{Gl}^2 - BL \times ddBL} \\[2ex] CL = \dfrac{DL \times KL \times Ll}{\overline{KL}^2 - DL \times ddDL} \\[2ex] CL = \dfrac{-EL \times VL \times Ll}{\overline{VL}^2 - EL \times ddEL} \\[2ex] CL = \dfrac{-FL \times Tl \times Ll}{\overline{Tl}^2 - FL \times ddFL} \\[2ex] \quad \&c. \end{array}\right\} \text{D'où résulte} \left\{\begin{array}{l} ddAL = \dfrac{CL \times \overline{Hl}^2 - AL \times Hl \times Ll}{CL \times AL} \\[2ex] ddBL = \dfrac{CL \times \overline{Gl}^2 - BL \times Gl \times Ll}{CL \times BL} \\[2ex] ddDL = \dfrac{CL \times \overline{KL}^2 - DL \times KL \times Ll}{CL \times DL} \\[2ex] ddEL = \dfrac{CL \times \overline{VL}^2 + EL \times VL \times Ll}{CL \times EL} \\[2ex] ddEL = \dfrac{CL \times \overline{YL}^2 + FL \times TL \times Ll}{CL \times FL} \\[2ex] \quad \&c. \end{array}\right.$$

XII. Suivant le même art. 11. du Mémoire du 29 Janvier 1701, l'on aura de même pour le second cas du Prob. art. 3. & 4. Fig. 2. FIG. II.

$$\left.\begin{array}{l}
CL = \frac{XL \times Hl \times Ll}{\overline{Hl}^2 - XL \times ddXL} \\[2ex]
CL = \frac{BL \times Gl \times Ll}{\overline{Gl}^2 - BL \times ddBL} \\[2ex]
CL = \frac{YL \times KL \times Ll}{\overline{KL}^2 - YL \times ddYL} \\[2ex]
CL = \frac{-EL \times VL \times Ll}{\overline{VL}^2 - EL \times ddEL} \\[2ex]
CL = \frac{-WL \times Tl \times Ll}{\overline{Tl}^2 - WL \times ddWL} \\[2ex]
\qquad \&c.
\end{array}\right\} \text{D'où résulte} \left\{\begin{array}{l}
ddXL = \frac{CL \times \overline{Hl}^2 - XL \times Hl \times Ll}{CL \times XL} \\[2ex]
ddBL = \frac{CL \times \overline{Gl}^2 - BL \times Gl \times Ll}{CL \times BL} \\[2ex]
ddYL = \frac{CL \times \overline{KL}^2 - YL \times KL \times Ll}{CL \times YL} \\[2ex]
ddEL = \frac{CL \times \overline{VL}^2 + EL \times VL \times Ll}{CL \times EL} \\[2ex]
ddWL = \frac{CL \times \overline{Tl}^2 + WL \times Tl \times Ll}{CL \times WL} \\[2ex]
\qquad \&c.
\end{array}\right.$$

XIII. Cela fait, l'équation propoſée de la Courbe ZLM, doit être différentiée juſqu'aux ſecondes différences, leſquelles ſeront $ddAL$, $ddBL$, $ddDL$, $ddEl$, $ddFL$, &c. pour le premier cas, Fig. 1. Et $ddXL$, $ddBL$, $ddYL$, $ddEl$, $ddWL$, &c. pour le ſecond, Fig. 2. après avoir chaſſé de l'équation propoſée tous les rayons AL, DL, FL, &c. des forces ſuppoſées hors le plan de la Courbe, par la ſubſtitution de leurs valeurs $\sqrt{\overline{AX}^2 + \overline{LX}^2}$, $\sqrt{\overline{DY}^2 + \overline{LY}^2}$, $\sqrt{\overline{FW}^2 + \overline{LW}^2}$, &c. dans leſquelles les hauteurs AX, DY, FW, &c. ſont données & conſtantes : de ſorte que LX, LY, LW, &c. eſt tout ce qu'il y a de variable dans ces valeurs de AL, DL, FL, &c. leſquelles le ſont auſſi, de même que BL, EL, & les autres rayons des forces ſuppoſées dans le plan de la Courbe en queſtion.

Ces ſecondes différences étant ainſi trouvées, il faut ſubſtituer en leurs places leurs valeurs compriſes dans les articles 11. & 12. ce qui ne laiſſera plus que des premieres différences dans l'égalité différenciée, avec des grandeurs finies parmi leſquelles ſera le rayon CL, qui dégagé ſe trouvera aussi en grandeurs finies & en premieres différences seulement; & ces premieres différences s'évanouiront de même par la substitution de leurs proportionnelles comprises entre le point L & les perpendiculaires tirées d'un même point quelconque du rayon LC, sur les droites prolongées de ce point L par tout ce qu'il y a de foyers (tant vrais qu'imaginés) dans le plan de la Courbe.

XIV. Pour exemple du premier cas du Probl. art. 1. & 2. soit ZLM une Ellipse ordinaire, dont ZM soit le grand axe; & A, D, ses foyers en qualité d'Ellipse, lesquels par conséquent soient l'un & l'autre dans le plan de cette Courbe, ou le reste soit aussi comme dans la Fig. 1. On sçait que quel qu'en soit le point L, son équation sera $AL + DL = ZM$, laquelle donnera $ddAL + ddDL = 0$. Donc (*art.* 11.) $0 = \frac{CL \times \overline{Hl}^2 - AL \times Hl \times Ll}{CL \times AL} + \frac{CL \times \overline{KL}^2 - DL \times KL \times Ll}{CL \times DL}$ $= CL \times DL \times \overline{Hl}^2 - AL \times DL \times Hl \times Ll + CL \times AL \times \overline{KL}^2 - AL \times DL \times KL \times Ll$, ou $AL \times DL \times Ll \times \overline{Hl + KL} = CL \times DL \times \overline{Hl}^2 + CL \times AL \times \overline{KL}^2$; ce qui donne $CL = \frac{\overline{Hl + KL} \times AL \times DL \times Ll}{DL \times \overline{Hl}^2 + AL \times \overline{KL}^2}$. D'où l'on voit que si de quelque point S pris à discrétion sur le rayon LC de la développée, on fait SP & SQ perpendiculaires sur LA & LD prolongées, la substitution de LP, LQ, LS au lieu de Hl, KL, Ll, qui leur sont proportionnelles, donnera aussi $CL = \frac{\overline{LP + LQ} \times AL \times DL \times LS}{DL \times \overline{LP}^2 + AL \times \overline{LQ}^2}$. Mais à cause des angles SLP & SLQ égaux dans l'Ellipse, l'on aura $LP = LQ$. Donc enfin $CL = \frac{2LQ \times AL \times DL \times LS}{\overline{DL + AL} \times \overline{LQ}^2} = \frac{2AL \times DL}{AL + DL} \times \frac{LS}{LQ}$ (à cause de l'équation proposée $AL + DL = ZM$) $= \frac{2AL \times DL}{ZM} \times \frac{LS}{LQ}$ sera la valeur du rayon de la développée de l'Ellipse en question.

On voit delà qu'en nommant AL, x; DL, y & ZM, a; l'on aura aussi $CL = \frac{2xy}{x+y} \times \frac{LS}{LQ} = \frac{2xy}{a} \times \frac{LS}{LQ}$ pour ce même

Fig. III.

rayon de l'Ellipſe ordinaire, lequel deviendra celui de l'Hyperbole ou de la Parabole, ſelon qu'on y fera celle qu'on voudra des deux grandeurs x (AL) & y (DL), négative ou infinie.

On voit de plus qu'en prenant S à l'extrémité C de ce rayon de la développée; alors LS & LQ ſe changeant en CL & $L\delta$, en faiſant $C\delta$ paralléle à SQ, ce rayon ſe trouvera auſſi pour lors $CL = \frac{2AL \times DL}{AL + DL} \times \frac{LC}{L\delta} = \frac{2AL \times DL}{ZM} \times \frac{LC}{L\delta} = \frac{2xy}{x+y} \times \frac{LC}{L\delta} = \frac{2xy}{a} \times \frac{LC}{L\delta}$: d'où réſulte $L\delta = \frac{2AL \times DL}{AL + DL} = \frac{2AL \times DL}{ZM} = \frac{2xy}{a}$ pour l'Ellipſe; & ce qui conviendra encore à l'Hyperbole ou à la Parabole, ſelon qu'on y fera celle qu'on voudra des deux grandeurs x (AL) & y (DL), négative ou infinie.

FIG. IV. XV. Pour donner auſſi quelque exemple de la maniere de trouver les rayons des développées pour le ſecond cas compris dans les art. 3. & 4. ſoit préſentement ZLM une Courbe à trois foyers A, B, D, dont A ſoit au-deſſus du plan de cette Courbe, D au-deſſous, & B dans ce plan même. Soit (ſi l'on veut) $AL + BL + 2DL = m$ l'équation de cette Courbe, & le reſte comme dans la Fig. 2.

Il eſt viſible que AX & DY (*hyp.*) perpendiculaires au plan de la Courbe, donneront $AL = \sqrt{\overline{LX}^2 + \overline{AX}^2}$, & $DL = \sqrt{\overline{LY}^2 + \overline{DY}^2}$. Ainſi l'équation propoſée donnant $ddAL + ddBL + 2ddDL = 0$, l'on aura auſſi $dd\sqrt{\overline{LX}^2 + \overline{AX}^2} + ddBL + 2dd\sqrt{\overline{LY}^2 + \overline{DY}^2} = 0$.

Mais pour trouver plus aiſément ces ſecondes différences de ſignes radicaux, ſoient $LX = x$, & $AX = b$: l'on aura $\sqrt{\overline{LX}^2 + \overline{AX}^2} = \sqrt{xx + bb}$, $d\sqrt{\overline{LX}^2 + \overline{AX}^2} = \frac{xdx}{\sqrt{xx+bb}}$, & $dd\sqrt{\overline{LX}^2 + \overline{AX}^2} = \frac{\overline{x^3 + bbx} \times ddx + bbdx^2}{\overline{xx+bb}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\overline{AL}^2 \times LX \times ddLX + \overline{AX}^2 \times \overline{HL}^2}{\overline{AL}^3}$. On trouvera de même $dd\sqrt{\overline{LY}^2 + \overline{DY}^2} = \frac{\overline{DL}^2 \times LY \times ddLY + \overline{DY}^2 \times \overline{Kl}^2}{\overline{DL}^3}$. Donc

$$\frac{\overline{AL}^2\times LX\times ddLX+\overline{AX}^2\times\overline{HL}^2}{\overline{AL}^2}+ddBL+\frac{2\overline{DL}^2\times LY\times ddLY+2\overline{DY}^2\times\overline{Kl}^2}{\overline{DL}^2}$$

$= 0$, ou $\frac{\overline{AX}^2\times\overline{HL}^2}{\overline{AL}^3}+\frac{2\overline{DY}^2\times\overline{Kl}^2}{\overline{DL}^3} = -\frac{LX\times ddLX}{AL} - ddBL - \frac{2LY\times ddLY}{DL}$ (*article 2.*) $= \frac{-CL\times\overline{Hl}^2+LX\times Hl\times Ll}{CL\times AL} - \frac{CL\times\overline{Gl}^2+BL\times Gl\times Ll}{CL\times BL} - \frac{2CL\times\overline{KL}^2+2LY\times KL\times Ll}{CL\times DL}$; ce qui donne (en multipliant le tout par $CL\times\overline{AL}^3\times\overline{DL}^3\times BL$, & en rendant tout poſitif) $CL\times\overline{DL}^3\times BL\times\overline{AX}^2\times\overline{HL}^2 + 2CL\times\overline{AL}^3\times BL\times\overline{DY}^2\times\overline{Kl}^2 + CL\times\overline{AL}^2\times\overline{DL}^3\times BL\times\overline{Hl}^2 + CL\times\overline{AL}^3\times\overline{DL}^3\times\overline{Gl}^2 + 2CL\times\overline{AL}^3\times\overline{DL}^2\times BL\times\overline{KL}^2 = \overline{AL}^2\times\overline{DL}^3\times BL\times LX\times Hl\times Ll + \overline{AL}^3\times\overline{DL}^3\times BL\times Gl\times Ll + 2\overline{AL}^3\times\overline{DL}^2\times BL\times LY\times KL\times Ll = \overline{DL\times LX\times Hl + AL\times DL\times Gl + 2AL\times LY\times KL}\times\overline{AL}^2\times\overline{DL}^2\times BL\times Ll$. Donc on aura eu le rayon $CL =$

$$=\frac{\overline{DL\times LX\times Hl+AL\times DL\times Gl+2AL\times LY\times KL}\times\overline{AL}^2\times\overline{DL}^2\times BL\times Ll}{\overline{DL}^3\times BL\times\overline{AX}^2\times\overline{HL}^2+2\overline{AL}^3\times BL\times\overline{DY}^2\times\overline{Kl}^2+\overline{AL}^2\times\overline{DL}^3\times BL\times\overline{Hl}^2+\overline{AL}^3\times\overline{DL}^3\times\overline{Gl}^2+2\overline{AL}^3\times\overline{DL}^2\times BL\times\overline{KL}^2}.$$

D'où l'on voit que ſi de quelque point S pris à diſcrétion ſur ce rayon LC de la développée, on fait SP, SR, SQ, perpendiculaires ſur LX, LB, LY prolongée, la ſubſtitution de LP, LR, LQ, LS, SP, SQ, au lieu de Hl, Gl, KL, Ll, HL, Kl, qui leur ſont proportionnelles, donnera auſſi $CL =$

$$=\frac{\overline{DL\times LX\times LP+AL\times DL\times LR+2AL\times LY\times LQ}\times\overline{AL}^2\times\overline{DL}^2\times BL\times LS}{\overline{DL}^3\times BL\times\overline{AX}^2\times\overline{SP}^2+2\overline{AL}^3\times BL\times\overline{DY}^2\times\overline{SQ}^2+\overline{AL}^2\times\overline{DL}^3\times BL\times\overline{SP}^2+\overline{AL}^3\times\overline{DL}^3\times\overline{LR}^2\times+2\overline{AL}^3\times\overline{DL}^2\times BL\times\overline{LQ}^2},$$

pour le rayon de la développée de la Courbe propoſée; & ainſi de toute autre à tant de foyers qu'on voudra, placés à diſcrétion hors ou dans le plan de cette même Courbe.

XVI. Si l'on ſuppoſe préſentement que tous les foyers A, B, D, de cette Courbe ſoient dans ſon plan : alors ayant $AX = o$, $DY = o$; & par conséquent auſſi $AL = LX$, $DL = LY$; la derniere valeur (*art.* 15.) du rayon CL de ſa développée, ſe changera ici en

$$CL = \frac{\overline{LP + LR + 2LQ} \times AL \times DL \times BL \times SL.}{BL \times DL \times \overline{LP}^2 + AL \times DL \times \overline{LR}^2 + 2AL \times BL \times \overline{LQ}^2.}$$

XVII. On voit encore delà que ſi la Courbe en queſtion n'avoit que deux foyers A & D, comme dans la Fig. 3. & que ſon équation fût $AL + DL = m$; cette Courbe ſeroit une Ellipſe ordinaire, dans laquelle BL & LR étant nuls, & $2DL$ ſe trouvant changé en DL, ou 2 en 1; le rayon de ſa développée ſeroit $CL = \frac{\overline{LP + LQ} \times AL \times DL \times SL}{DL \times \overline{LP}^2 + AL \times \overline{LQ}^2}$ (à cauſe de $LP = LQ$ dans cette Ellipſe) $= \frac{2LQ \times AL \times DL \times SL}{\overline{DL + AL} \times \overline{LQ}^2}$ $= \frac{2AL \times DL}{AL + DL} \times \frac{SL}{LQ}$, comme dans l'art. 14. Ce qui ſuffit pour l'intelligence de la maniere de trouver les rayons des développées des Courbes à pluſieurs foyers placés à diſcrétion.

SCHOLIE II.

XVIII. Pour faire préſentement quelques uſages des Régles compriſes dans les art. 2. 4. 5. 6. 7. 8. il faut que les rapports des tems, & des forces centrales entr'elles, ſoient donnés pour avoir chacune d'elles en particulier, & le rapport qu'elles ſuivent toutes ſéparément priſes. Soit donc (ſi l'on veut) $ds = dt$ comme dans l'art. 9. Et la Courbe

Fig. I. II. ZLM décrite à la maniere de M. de *Tſchirnhauſen*, où ces rapports de forces entr'elles ſont toujours donnés en ce que le fil par le moyen duquel il décrit ces ſortes de Courbes, ſe trouvant également bandé dans toute ſa longueur, les réſiſtances des ſtyles fixes aux foyers A, B, D, E, F, &c. contre le ſtyle L décrivant, où les efforts de celui-ci contr'eux, c'eſt-à-dire, les forces centrales qu'on y ſuppoſe, ſeroient comme les multiples des portions de fil compriſes entre lui & chacun d'eux, ou comme les nombres par leſquels les diſtances AL, BL, DL, EL, FL, &c.

&c. de lui à chacun d'eux, se trouvent multipliées dans l'équation de la Courbe en question. De sorte qu'en prenant $a \times AL + b \times BL + c \times DL - e \times EL - f \times FL \mp \&c. = m$ pour l'équation de cette Courbe ZLM, les forces centrales A, B, D, E, F, &c. seroient ici comme a, b, c, e, f, &c. Et ainsi de toute autre Courbe décrite à la maniere de M. de *Tschirnhausen*. Telles sont celles des Exemples suivans.

EXEMPLE I.

Trouver les forces centrales tendantes à la fois aux deux foyers de l'Ellipse ordinaire, décrite d'un mouvement uniforme en vertu de ces forces.

XIX. *Solut.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 14. Fig. 3. la premiere des Régles générales des forces centrales de l'art. 9. donnera ici $A \times L\alpha + D \times L\delta = 1$. Mais par la nature de cette Ellipse on trouve $L\alpha = L\delta$. Donc on aura aussi $\overline{A + D} \times L\delta = 1$. ou $A + D = \frac{1}{L\delta}$ (*art. 14.*) $= \frac{AL+DL}{2AL+DL} = \frac{ZM}{2AL+DL}$. Ainsi suivant l'art. 18. l'équation $AL + DL = ZM$ de cette Courbe, marquant que les forces A & D y sont égales, elles seront chacune $= \frac{ZM}{4AL+DL}$, c'est-à-dire, en raison réciproque des produits $AL \times DL$ faits des distances du corps décrivant ou de la Planete L qui décrit cette Ellipse, aux foyers de cette même Ellipse. Fig. III.

On trouvera de même dans l'hyperbole décrite par le concours de deux forces centrales tendantes, l'une à son foyer, & l'autre directement à contre-sens du foyer de son opposée, que chacune de ces forces égales suivra toujours la raison réciproque des produits des distances de ces deux foyers à chaque point correspondant de cette Courbe.

Quant à la Parabole, comme elle n'est qu'une Ellipse ou une hyperbole dont un des foyers est infiniment éloigné de l'autre; elle se trouvera ici décrite par le concours de deux forces égales tendantes, l'une à son foyer, & l'autre parallélement à son axe de dehors en dedans, lesquelles seront chacune en raison réciproque des distances de ce foyer à chaque point correspondant de cette Courbe.

Enfin dans le cercle, au centre duquel les foyers A & D de l'Ellipse se réunissent, ayant par-tout $AL = DL = \frac{1}{2} ZM$, l'on aura aussi $\frac{1}{ZM}$ pour chacune des forces centrales tendantes à ces foyers, c'est-à-dire $\frac{2}{ZM}$ pour la force totale tendante au centre de ce cercle : d'où l'on voit qu'elle doit être par-tout la même.

EXEMPLE II.

Fig. IV. *Trouver les forces centrales tendantes à la fois aux trois foyers* A, B, D, *de la Courbe* ZLM *de l'art. 15. décrite d'un mouvement uniforme en vertu de ces forces, & dont le seul foyer* B *soit dans son plan; mais* A *au-dessus, &* D *au-dessous de ce même plan.*

XX. *Solut.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'article 15. Fig. 4. la seconde des Régles générales de l'article 9. donnera ici $\frac{A \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + B \times L\beta + \frac{D \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} = 1$. Mais (*art. 15.*) l'équation de la Courbe en question étant $AL + BL + 2DL = m$, l'art. 18. donne $B = A$, & $D = 2A$. Donc $\frac{A \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + A \times L\beta + \frac{2A \times L\delta \times \sqrt{\overline{DL}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} = 1$; ce qui donne $A = \frac{LA \times LD}{LD \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2} + LA \times LD \times L\beta + 2LA \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}$. Telle est aussi la valeur de B, & le double sera celle de D. De sorte que chacune de ces trois forces sera comme cette fraction correspondante, dans laquelle les valeurs de $L\alpha$, $L\beta$, $L\delta$, se trouvent par le moyen du rayon LC de la développée de la Courbe, tel qu'on le voit dans l'article 15.

XXI. On voit delà que si cette Courbe avoit tous ses foyers A, B, D, dans son plan, comme dans l'article 16. alors les hauteurs AX & DY se trouvant nulles, chacune des forces A & B se trouveroit $= \frac{1}{L\alpha + L\beta + 2L\delta}$, & la troisiéme $D = \frac{2}{L\alpha + L\beta + 2L\delta}$: De sorte que chacune de ces trois forces suivroit toujours la raison réciproque des sommes $L\alpha + L\beta + 2L\delta$ correspondantes, lesquelles sommes s'obtiendront encore par le moyen du rayon CL de la développée qui se voit dans l'article 15.

XXII. Enfin il suit encore delà que si cette Courbe n'avoit que les foyers A & D tous deux dans son plan, & que son équation fût $AL + DL = m$, les forces centrales tendantes à la fois à ces mêmes foyers, seroient chacune $= \frac{1}{L\alpha + L\delta}$, à cause que LB, alors nulle, rendroit aussi $L\beta$ nulle, & que $2LD$ changés ici en DL, changeroient aussi $2L\delta$ en $L\delta$. Et parce que cette Courbe seroit alors une Ellipse qui donneroit $L\alpha = L\delta$, chacune de ces forces A & D se trouveroit aussi ici $\frac{1}{2L\delta}$, c'est-à-dire, en raison réciproque des $L\delta$ correspondantes ; comme dans l'exemple 1. art. 19. FIG. III.

EXEMPLE III.

Soit encore la Courbe ZLM *à trois foyers du précédent Exemple 2. Mais présentement décrite d'un mouvement varié, tel (si l'on veut) que les tems soient par-tout comme les espaces compris entr'elle & sa développée jusqu'aux rayons correspondans de cette même développée, c'est-à-dire, tel que l'on ait partout* $dt = CL \times Ll$: *On demande encore les Forces centrales tendantes à la fois aux trois foyers* A, B, D, *de cette Courbe.* FIG. IV.

XXIII. *Solut.* Toutes choses demeurant donc les mêmes que dans l'art. 20. ou que dans l'art. 15. Fig. 4. la seconde des Régles générales de l'art. 8. donnera ici $\frac{AX \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA}$

$+ B \times L\beta + \frac{D \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} = \frac{ds^2}{dt^2}$ (*hyp.*) $= \frac{\overline{Ll}^2}{\overline{CL}^2 \times \overline{Ll}^2} =$ $\frac{1}{\overline{eL}^2}$. Mais (*art. 15.*) l'équation de la Courbe en queſtion étant $AL + BL + 2\,DL = m$, l'art. 18. donne encore $B = A$, & $D = 2\,A$. Donc $\frac{A \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2}}{LA} + A \times L\beta +$ $+ \frac{2A \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}{LD} = \frac{2}{\overline{CL}^2}$; ce qui donne $A = \frac{1}{\overline{CL}^2} \times$

$$\frac{LA \times LD}{LD \times L\alpha \times \sqrt{\overline{LA}^2 - \overline{AX}^2} + LA \times LD \times L\beta + 2LA \times L\delta \times \sqrt{\overline{LD}^2 - \overline{DY}^2}}.$$

Telle eſt auſſi la valeur de B, & le double ſera celle de D. De ſorte que chacune de ces trois forces ſera comme cette fraction correſpondante, dans laquelle les valeurs de LC, $L\alpha$, $L\beta$, $L\delta$, ſe trouveront par le moyen de l'art. 15.

XXIV. On voit encore delà que ſi cette Courbe avoit tous ſes foyers A, B, D, dans ſon plan, comme dans les art. 16. & 21. Alors AX & DY ſe trouvant nulles, chacune des forces A & B ſe trouveroit $= \frac{1}{\overline{CL}^2} \times \frac{1}{L\alpha + L\beta + 2L\delta}$, & la troiſiéme $D = \frac{2}{\overline{CL}^2} \times \frac{1}{L\alpha + L\beta + 2L\delta}$: de ſorte que chacune de ces forces ſuivroit toujours la raiſon réciproque des produits $\overline{CL}^2 \times \overline{L\alpha + L\beta + L\delta}$ correſpondans, leſquels produits s'obtiendront encore par le moyen de l'art. 15.

FIG. III. XXV. Enfin il ſuit encore delà, que ſi cette Courbe n'avoit que les foyers A & D tous deux dans ſon plan, & que ſon équation fût $AL + DL = m$, les forces centrales tendantes à la fois à ces mêmes foyers, ſeroient chacune $= \frac{1}{\overline{CL}^2} \times \frac{1}{L\alpha + L\delta}$. Et parce que cette Courbe ſeroit alors une Ellipſe qui donneroit $L\alpha = L\delta$, chacune de ces forces A & D ſe trouveroit auſſi ici $= \frac{1}{\overline{CL}^2} \times \frac{1}{2L\delta}$ (*art. 14.*) $= \frac{\overline{ZM}^3 \times \overline{LQ}^2}{16\,\overline{AL}^3 \times \overline{DL}^3 \times \overline{LS}^2}$.

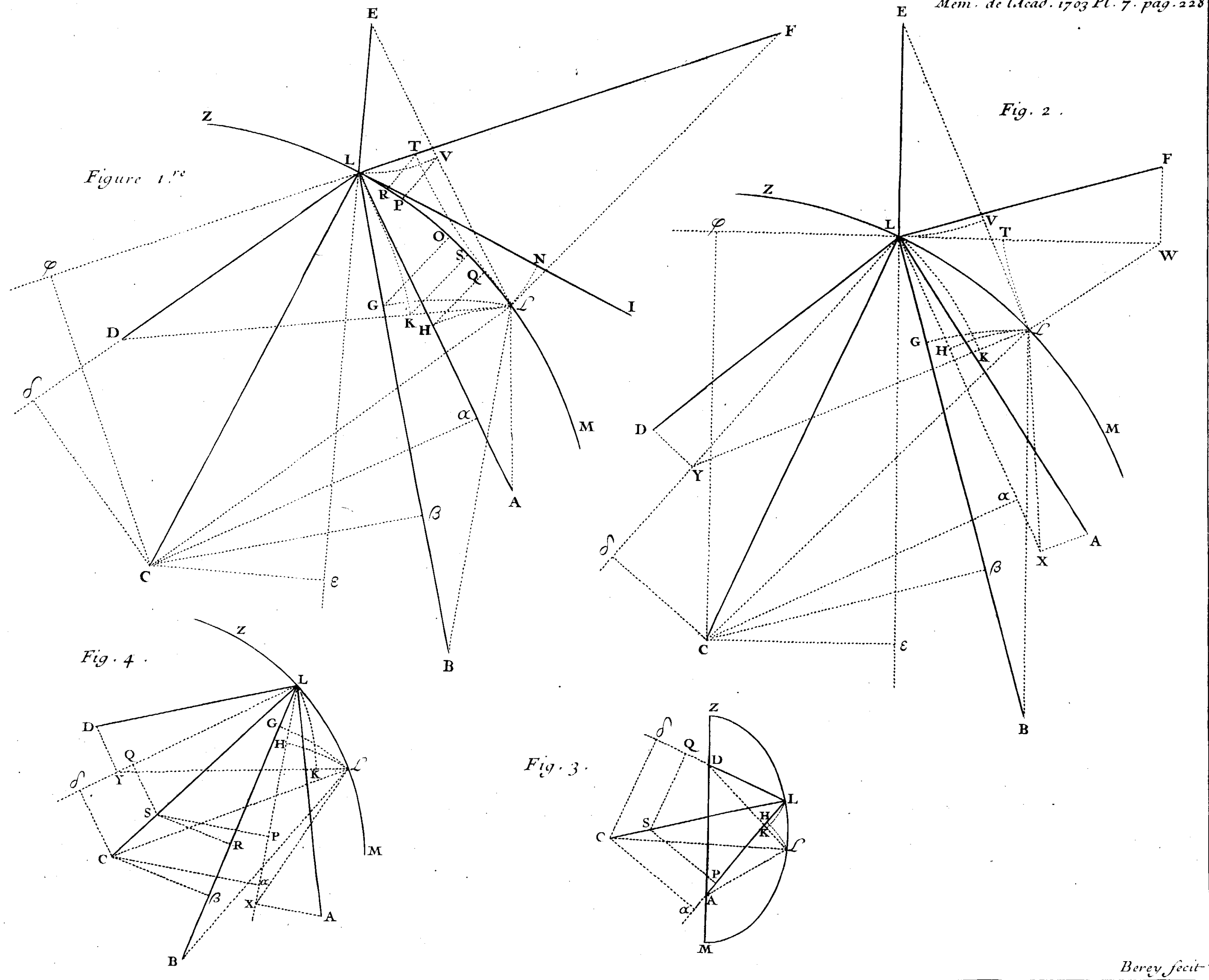

Figure 1.re

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Berey fecit

La même chose se trouvera pour l'Hyperbole ou pour la Parabole, selon qu'on fera ici celle qu'on voudra des grandeurs *AL* & *DL*, négative ou infinie. Mais en voilà, ce me semble, assez pour faire voir la maniere de se servir des Régles des précédens art. 2. 4. 5. 6. 8. & 9. pour trouver les Forces centrales des Courbes à plusieurs foyers, les rapports des Tems & de ces forces entr'elles étant donnés, ou le seul rapport des tems étant donné dans celles de ces Courbes qui seroient décrites à la maniere de M. de Tschirnhausen *Med. ment. & corp.* Tout cela est manifeste par ce qui précéde; ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

EXPERIENCES
DU BAROMETRE
Faites sur diverses Montagnes de la France.

PAR M. MARALDI.

DANS le voyage que nous avons fait avec Messieurs Cassini, Chazelles & Couplet, sous la direction de M. Cassini pour la détermination de la Méridienne, nous avons fait des expériences du Barométre sur plusieurs Montagnes de l'Auvergne, du Languedoc, & du Roussillon, dont nous avons mesuré géométriquement leurs hauteurs sur la surface de la mer. Ces nouvelles expériences, qui ont été faites à des hauteurs beaucoup plus grandes que celles qu'on avoit jusqu'à présent, pourront servir pour connoître les propriétés & l'étendue de l'air, & combien il se raréfie à diverses hauteurs de la surface de la terre. 1703. 14. Novemb.

Nous ne rapporterons point ici le détail des opérations & des calculs qu'il a fallu faire pour trouver la hauteur