MEMOIRES
DE
MATHEMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIREZ DES REGISTRES
de l'Academie Royale des Sciences.

De l'Année M. DC. XCIX.

METHODE
POUR TROUVER DES COURBES
Le long desquelles un corps tombant, s'approche ou s'éloigne de l'horison en telle raison des temps qu'on voudra, & dans quelque hypothese de vîtesses que ce soit, &c.

Par M. VARIGNON.

IL y a déja long-tems que M^r. Leibnitz & M^rs. Bernoulli ont trouvé les Courbes, le long desquelles un corps tombant suivant l'hypothese d'acceleration établie par Galilée, il approcheroit également de l'horizon ou d'un point quelconque en tems égaux. Je donnai aussi à l'Académie en 1695. une nouvelle Solution du premier de ces Problêmes sans le secours du calcul des infi- 7. Mars. 1699.

nis. Voici presentement ce que ce calcul m'a donné depuis par rapport à la même matiere à l'occasion de cet Ecrit, lequel ne s'étendant qu'aux approches égales de l'horison en tems égaux pour l'hypothese seule de Galilée, ma fait penser à celles qui seroient en telle raison des tems qu'on voudroit, & suivant telle hypothese d'acceleration qu'on voudroit aussi.

Je trouvai d'abord les Courbes requises pour cela dans l'hypothese ordinaire des directions des graves paralleles entr'elles. Ensuite se presenterent de même celles que ces corps décriroient dans l'hypothese de leurs directions concourantes au centre de la Terre. De là reprenant les directions paralleles, je trouvai encore de même pour toutes les hypotheses imaginables d'acceleration dans les corps qui tombent, l'expression générale des Courbes qu'ils devroient aussi décrire pour s'approcher ou s'éloigner également en tems égaux de tout autre point quelconque pris dans le plan de chacune de ces Courbes. Et dans le détail des differentes positions de ce point, se sont présentées plusieurs formules très-curieuses.

Par exemple (pour ne parler ici que de l'hypothese de Galilée) en imaginant ce point dans l'axe vertical de la courbe cherchée en ce cas, j'en ai vû naître tout ce qu'on en a donné jusqu'ici d'Equations. En le regardant comme infiniment éloigné suivant une direction verticale, j'en ai vû naître aussi le lieu de la seconde Parabole cubique déja trouvée pour la Courbe, suivant laquelle en ce cas un corps s'approcheroit également de l'horizon en tems égaux. De même en regardant ce point comme infiniment éloigné suivant une direction horizontale, la Parabole ordinaire s'est trouvée être la Courbe suivant la convexité de laquelle un corps tombant, il s'éloigneroit de son axe vertical également en tems égaux; ce qui est justement ce que Galilée avoit supposé pour prouver que cette Courbe est celle que décriroient les corps graves jettez horizontalement dans le vuide. Quant au cas de ce point infiniment éloigné suivant une direction oblique quelconque à l'horison, je détermine quand la courbe cherchée doit être encore une telle parabole, ou non, même dans l'hypothese de Galilée. Voici le tout dans l'ordre qu'il m'est venu en pensée.

I. COMMENÇONS donc par chercher une Courbe BC, telle que, supposé les directions des graves paralleles entr'elles, un corps tombant de A le long de cette Courbe, il s'éloigne de l'horizon AD en telle raison des tems qu'on voudra, quelque hypothese qu'on fasse aussi de la vîtesse des corps en tombant. Plan. 1. FIG. 1.

Après avoir fait la verticale AL, avec les horizontales BH, bb, indéfiniment proches l'une de l'autre, soient prises les ordonnées EH d'une Courbe quelconque AHG pour les vîtesses aquises par les chûtes de A en B ou en E; soient de même les tems employez à tomber de A en B, exprimez par les ordonnées EF d'une autre courbe AFK aussi quelconque. Soient enfin $AE = x$, $EB = y$, $EH = v$, & $EF = z$.

II. Cela posé, l'on aura $\frac{Bb}{HE}$ pour le tems emploïé à parcourir Bb, lequel n'étant qu'un instant (dz), donnera $dz = \frac{Bb}{HE} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$, ou (en prenant $a = 1$) $a\sqrt{ax^2 + dy^2} = v\,dz$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'à substituer les valeurs de v & de dz, qui resulteront en x & en dx des équations des Courbes données AHG & AFK; & elle deviendra celle de la Courbe cherchée BC.

III. Pour faire l'application de ceci à l'hypothese de Galilée, il faut considerer que dans cette hypothese les vîtesses HE (v) des corps qui tombent, sont comme les racines des hauteurs AE (x), en sorte que AHG soit une parabole ordinaire dont le lieu soit $v = \sqrt{ax}$; ce qui étant introduit dans l'équation précedente (*art.* 2.) $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = v\,dz$, la changera en $a\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz\sqrt{ax}$, ou $\frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ax}} = dz$ pour tel rapport des tems qu'on voudra dans l'hypothese de Galilée.

IV. Si l'on veut de plus que la Courbe BC soit telle qu'un corps tombant de A le long d'icelle, s'éloigne également de l'horizon AD en tems égaux : c'est-à dire

en ſorte que les tems FE ſoient comme les hauteurs AE, ou que AFK ſoit une ligne droite, & ſi l'on veut $LK = LA$;
FIG. 2. alors on aura auſſi $FE(z) = AE(x)$; & par conſequent $dz = dx$. Ce qui changera encore ici l'équation $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ax}} = dz$ de *l'art.* 3. en $\frac{a\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{ax}} = dx$, laquelle ſe réduit à $dy = dx\sqrt{\frac{x-a}{a}}$, ou $aady = adx\sqrt{ax-aa}$, dont l'intégrale eſt $aay = \frac{2ax-2aa}{9}\sqrt{ax-aa}$, ou $ay = \frac{2x-2a}{3}\sqrt{ax-aa}$: de ſorte qu'en prenant $t = x - a$, ce lieu ſera $ay = \frac{2t}{3}\sqrt{at}$, ou $aayy = \frac{4at^3}{9}$, ou enfin $\frac{9}{4}ayy = t^3$. Ce qui fait voir que la Courbe cherchée BC doit être ici une ſeconde Parabole cubique, laquelle ne doit commencer qu'au point O de ſon axe, tel que AO ſoit $= a$; ce qui rendra $OE = t$, puiſque (*hyp.*) $AE = x$. D'où l'on voit que le corps qui doit ainſi tomber le long de cette Courbe, doit commencer à ſon ſommet O avec une vîteſſe telle qu'il l'auroit acquiſe de A en O; ce qui s'accorde avec les Solutions de M^r^ Leibnitz & M^rs^ Bernoulli.

FIG. 3. V. Voilà pour le cas des directions des graves paralleles entr'elles; mais ſi l'on veut qu'elles concourent en quelque point R, qui ſoit (ſi l'on veut) le centre de la Terre, comme dans la Fig. 3. priſe en général; & qu'après avoir pris encore $AE = x$ pour les hauteurs des eſpaces parcourus depuis le commencement A de la chûte juſqu'au point B de la courbe cherchée où le corps ſe trouve, z pour les tems emploïez à les parcourir, v pour la vîteſſe acquiſe en ce point B; on prenne de plus $AR = c$ pour la diſtance du centre R de la Terre au point A d'où ce corps commence à tomber, & $AM = y$ pour l'arc de l'horizon compris entre ce point A & la droite RM tirée du centre R de la Terre par ce corps B: Un raiſonnement ſemblable & tout auſſi ſimple que celui de *l'art.* 2. donnera ici $dz = \frac{\sqrt{ccdx^2 + \overline{c-x}^2 \times dy^2}}{cv}$ pour l'équation générale de la Courbe, le long de laquelle ce

corps tombant s'éloigneroit de l'horizon, ou s'approcheroit du centre de la Terre en telle raison des tems qu'on voudroit; parce qu'en imaginant Rm infiniment près de RM, & qui rencontre BE en G; l'on aura $RM\ (c)$. RB $(c-x)$ :: $Mm\ (dy)$. $BG = \frac{c-x}{c} \times dy$. Ce qui donne $Bb = \frac{\sqrt{ccdx^2 + \overline{c-x}^2 \times dy^2}}{c}$; & consequemment, l'instant $dz \left(\frac{Bb}{v}\right) = \frac{\sqrt{ccdx^2 + \overline{c-x}^2 \times dy^2}}{cv}$. De sorte que si l'on vouloit que ces éloignemens de l'horizon, ou ces approches du centre R de la Terre, fussent comme les temps dans l'hypothese des vîtesses acquises en raison des racines des hauteurs; l'on auroit alors (en prenant $a = 1$) $ady = \frac{cdx\sqrt{ax-aa}}{c-x}$ pour l'équation de cette Courbe.

VI. Il n'y a ici qu'à faire c infinie pour le cas des directions des graves paralleles entr'elles; & ces deux égalitez donneront encore celles *des articles* 2 & 4 sçavoir $dz = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$ ou (à cause de $a = 1$) $v\,dz = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ comme dans *l'art.* 2. Et $ady = dx\sqrt{ax-aa}$, ou $dy = dx\sqrt{\frac{x-a}{a}}$, comme dans *l'art.* 4.

VII. Pour construire presentement l'égalité $ady = \frac{cdx\sqrt{ax-aa}}{c-x}$ de *l'art.* 5. & décrire la Courbe particuliere BC qu'elle exprime dans la Fig. 3. restreinte à cette équation particuliere; soit sur l'axe AR une Courbe Geometrique ST dont les abscisses étant $AE = x$, & les ordonnées SE perpendiculaires à cet axe, le lieu soit $SE = \frac{c\sqrt{ax-aa}}{a-x}$; laquelle par consequent rencontre AR en O, de maniere qu'elle laisse $AO = a$, & que RT perpendiculaire sur AR, lui soit asymptote. Soit prise ensuite $AP = AO$ sur RA prolongée, sur laquelle soient faites aussi les perpendiculaires AQ, PQ; soit de plus l'arc circulaire AMD décrit du centre R. FIG. 3.

Cela fait, & les quadratures de l'hyperbole & du cercle étant ſuppoſées, ſoit pris le rectangle PL égal à l'eſpace OES, enſuite l'arc $AM = AL$; ſoit de plus la droite MR rencontrée en B par l'arc EB décrit du centre R. Il eſt viſible que ce point B ſera un de ceux de la Courbe cherchée; & qu'ainſi cette Courbe BC ne doit commencer qu'en O. D'où l'on voit encore que c'eſt là que le corps qu'on ſuppoſe la ſuivre en tombant, doit commencer avec une vîteſſe telle qu'il l'auroit acquiſe de A en O, pour s'éloigner de l'horizon AD, ou pour s'approcher du centre R de la Terre, également en temps égaux.

Il eſt encore manifeſte qu'en ſuppoſant $x - a\ (OE) = t$, & $dr = BG$ retranché de BE par Rm infiniment voiſine de RM; l'on aura auſſi $dt\sqrt{t} = dr\sqrt{a}$ pour l'équation de la Courbe OBC. D'où l'on voit qu'elle doit toucher ſon axe AR en O, & revenir enſuite le rencontrer en R ſous un angle (avec la derniere RB) dont le ſinus ſoit à celui de ſon complement $:: \sqrt{OR}.\sqrt{AO}$. De maniere qu'elle aura un point d'inflexion; lequel ſera B, ſi l'on prend $EO = -\frac{3}{4}a + \sqrt{\frac{1}{2}ac + \frac{1}{16}aa}$. Elle aura auſſi ſa longueur $OB = \frac{2}{3}AE \times \sqrt{\frac{AE}{AO}}$, c'eſt-à dire, ſa longueur entiere $OBCR = \frac{2}{3}AR \times \sqrt{\frac{AR}{AO}}$; Et le triligne $ORBO = \frac{5OR \times OE - 3OE \times OE}{15} \times \sqrt{\frac{OE}{AO}}$, c'eſt à-dire, l'eſpace entier $ORCBO$, qu'elle renferme, $= \frac{2}{15} OR \times OR \times \sqrt{\frac{OR}{AO}}$

Il eſt à remarquer par rapport à la précedente équation $dt\sqrt{t} = dr\sqrt{a}$, que ſi du point b ou Rm infiniment proche de RM, rencontre l'arc OC, l'on fait bI en ſorte qu'on ait $bG. GI :: RG. GE.$ l'on aura BI, & non pas $BG\ (dr)$, pour la differentielle des arcs concentriques be, BE. Ainſi l'integrale de $dt\sqrt{t} = dr\sqrt{a}$ ne ſera pas ici $\frac{2}{3}t\sqrt{t} = r\sqrt{a} = BE \times \sqrt{a}$, comme elle le feroit ſi le point R étoit infiniment éloigné, en ſorte que BR, ER, fuſſent paralleles entr'elles, & l'ordonnée BE une ligne droite: parce qu'alors $BG\ (dr)$ ſeroit effectivement la differentielle de BE pour lors$=r$, & non pas ici où la differentielle de BE eſt BI; puiſque (*hyp.*) $GI. GE :: bG RG.$ ce qui donne $GI+GE$ (IE). $GE :: bG+RG$ (bR). $RG.$ ou (ſoit l'arc be decrit du centre R) $IE. bR :: GE. GR :: be. bR.$ donc $IE = be$, & $BI = BE - be$.

De plus, ayant (*hyp.*) $RG. GE :: bG. GI = \frac{GE \times bG}{RG} = \frac{BE \times Ee}{RE}$. l'on aura cette differentielle $BI = BG - \frac{BB \times Ee}{RE}$ (ſuivant les noms de *l'art.* 5.) $= \frac{cdy - xdy - ydx}{c}$.

VIII. Si l'on conçoit préſentement que le point R ſoit infiniment éloigné; alors AR, MR, devenant paralleles, l'arc AMD ſe redreſſant en AQ, & la Courbe OST ſe changeant en parabole d'Apollonius, dont O eſt le ſommet, & dont la concavité ſe tourne vers OR; la Courbe OBC devient auſſi la même parabole cubique que dans *l'art.* 4. Et la conſtruction précedente ſe réduit ici à prendre l'eſpace parabolique OES= rect. AN: le point B où les droites SE, NM, ſe rencontrent, étant à cette ſeconde parabole cubique. FIG. 4.

IX. Il eſt à remarquer que les vîteſſes que nous avons ſuppoſées (*art.* 5.) comme les racines des hauteurs, nonobſtant le changement continuel des directions de la peſanteur du corps en queſtion, ne conviennent aux corps graves de peſanteurs conſtantes & de directions changeantes, que dans les cas de ces directions paralleles; & que pour avoir de telles vîteſſes dans un continuel changement de leurs directions concourantes en un même point, il leur faudroit des peſanteurs variables: mais ce n'eſt pas ici le lieu d'en parler, outre que quelque hypotheſe de vîteſſe qu'on faſſe, l'équation generale de *l'art.* 5. lui conviendra toûjours également. Paſſons donc à quelques Remarques que voici encore par rapport au même ſujet.

REMARQUES.

X. Pour dire auſſi quelque choſe de la Courbe QLM le long de laquelle un corps tombant du point A, il approche également en tems égaux d'un autre point quelconque T placé auſſi où l'on voudra dans le plan de cette FIG. 5.

Courbe, ſuppoſé les directions des graves paralleles entr'elles. Soient la verticale AB & l'horizontale TB leſquelles ſe rencontrent en B, & auxquels ſoient paralleles les coordonnées LO & LH menées d'un point quelconque L de cette Courbe ; ſoit de plus du centre T, l'arc Sl qui laiſſe Ll indéfiniment petite ; ſoit auſſi $v =$ la vîteſſe de ce corps en L. L'on aura en général pour toutes les poſitions de T, $= \frac{Ll}{SL}$; ce qui donne $\sqrt{vv - 1} = \frac{Sl}{SL}$; & de là (en ſuppoſant ici $AB = a$, $BT = b$, $AH = x$, & $HL = z$) vient $\sqrt{vv - 1} = \frac{zdx - bdx + adz - xdz}{xdx - adx + zdz - bdz}$ pour l'équation de cette Courbe QLM, quelque hypotheſe qu'on faſſe des vîteſſes v.

XI. D'où l'on voit que lorſque T ſe trouve au deſſus de la Courbe QLM : ſçavoir.

1°. Lorſque T ſe trouve entre cette Courbe & l'horizontale AG, l'équation précedente demeure la même, n'y arrivant autre changement ſinon que $AB\,(a)$ ſe trouve ſeulement plus petite que AH à meſure que T ou BO ſe trouve plus près de AG.

2°. Mais lorſque T ſe trouve dans l'horizontale AG, alors $AB\,(a) = 0$, change l'équation précedente en $\sqrt{vv - 1} = \frac{zdx - bdx - xdz}{xdx - bdz + zdz}$.

3°. Et ſi T ſe trouve au-delà de AG vers N du côté de G ; alors $AB\,(a)$ devenu negatif, donnera $\sqrt{vv - 1} = \frac{zdx - bdx - adz - xdz}{xdx + adx + zdz - bdz}$.

XII. Lorſque T ſe trouve de l'autre côté de l'axe AB vers XE ; alors $BT\,(b)$ devenu negatif à ſon tour donnera,

1°. Sur BX, $\sqrt{vv - 1} = \frac{zdx + bdx + adz - xdz}{xdx - adx + zdz + bdz}$, & toûjours de même juſque ſur AE.

2°. Mais lorſque T ſera ſur AE ; alors outre $BT\,(b)$ negatif ayant encore $AB\,(a) = 0$, l'on aura $\sqrt{vv - 1} = \frac{zdx + bdx - xdz}{xdx + zdz + bdz}$.

3°. Et ſi T, du côté de E, ſe trouve au deſſus de AE vers N ; alors $AB\,(a)$ negatif auſſi-bien que $BT\,(b)$, donnera

donnera $\sqrt{vv-1}=\frac{zdx+bdx-adz-xdz}{xdx+adx+zdz+bdz}$.

XIII. Enfin si T se trouve sur AB; alors BT $(b)=o$ donnera.

1°. $\sqrt{vv-1}=\frac{zdx+adz-xdz}{xdx-adx+zdz}$, tant que T sera au dessous de A vers C, comme en B, &c.

2°. Lorsque T sera en A; ayant aussi pour lors AB $(a)=o$, l'on aura $\sqrt{vv-1}=\frac{zdx-xdz}{xdx+zdz}$.

3°. Mais lorsque T demeurant sur AB prolongée, se trouvera par-delà A vers N; alors outre BT $(b)=o$, ayant encore AB (a) negatif, l'on aura $\sqrt{vv-1}=\frac{zdz-adz-xdz}{xdx+adz+zdz}$.

XIV. De plus si l'on suppose le point T infiniment éloigné, c'est-à-dire, LT infinie:

1°. Si LT infinie se trouve verticale de quelque côté de AB qu'elle rencontre XO, alors AB (a) se trouvant aussi infinie, l'on aura $\sqrt{vv-1}=\frac{adz}{-adx}=\frac{dz}{-dx}$, si T est du côté de CC; ou $\sqrt{vv-1}=\frac{-adz}{adx}=\frac{-dz}{dx}$, s'il est du côté de N; ce qui revient au même.

2°. Si LT infinie se trouve horizontale; alors BT (b) à son tour infinie, donnera aussi $\sqrt{vv-1}=\frac{dx}{dz}$; de quelque côté de AB que se trouve le point T.

3°. Enfin si LT infinie se trouve oblique à l'horizon; alors AB (a) & BT (b) toutes deux infinies, donneront $\sqrt{vv-1}=\frac{-bdx+adz}{-bdz-adx}=\frac{bdx-adz}{bdz+adx}$ (soit $p.q::a.b.$) $=\frac{qdx-pdz}{qdz+pdx}$, dont les signes varieront selon les côtés de son obliquité.

XV. Il est à remarquer que le cas du nomb. 1. de l'art. 13. exprimé dans la Fig. 6. est celui que M. Leibnitz, & M[rs] Jacques & Jean Bernoulli freres ont resolu, chacun à leur maniere, dans les actes de Leipsik de 1694. L'équation $\sqrt{vv-1}=\frac{zdx+adz-xdz}{xdx-adx+zdz}$ trouvée pour ce cas, revenant aux leurs FIG. 6.

Car ce cas de T en B; & de H au-dessous, donnant $TH = x - a$, si après avoir décrit du centre T un demi cercle quelconque DEK qui rencontre TL en E; & de ce point E l'ordonnée EF, on fait $TF = y$, $TE = c$, & $TL = t$; l'on aura,

1°. $TE(c) . TL(t) :: TF(y) . TH(x-a) = \frac{ty}{c}$. Ce qui donne $x = \frac{ty}{c} + a$, & $dx = \frac{tdy + ydt}{c}$.

2°. $TE(c) . TL(t) :: FE(\sqrt{cc-yy}) . HL(z) = \frac{t}{c}\sqrt{cc-yy}$. Ce qui donne aussi $dz = \frac{ccdt - yydt - tydy}{c\sqrt{cc-yy}}$.

Donc en substituant ces valeurs de x, dx, z, dz, dans l'équation précedente, l'on aura $\sqrt{vv-1} = \frac{tdy}{dt\sqrt{cc-yy}}$.

Mais ici en prenant à l'ordinaire la vîtesse (v) en L, comme $\sqrt{AH}$, c'est-à-dire, $v = \sqrt{x}$ (*nomb.* 1.) $= \sqrt{\frac{ty}{c} + a}$, & $a = 1$; l'on aura $\frac{tdy}{dt\sqrt{cc-yy}} (\sqrt{vv-1}) = \sqrt{\frac{ty}{c} + a - 1} = \sqrt{\frac{ty}{c}}$: Ce qui donne l'équation $\frac{dy\sqrt{c}}{\sqrt{ccy-y^3}} = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, ou (en faisant passer par A le cercle arbitraire DEK, comme a fait M. (Jean) Bernoulli, c'est-à-dire, en prenant son rayon $c = a = 1$) $\frac{dy}{\sqrt{aay-y^3}} = \frac{dt}{\sqrt{t}}$, ainsi qu'il l'a trouvée pour ce cas, en appellant x, ce que nous appellons t; & que M. Leibnitz l'a trouvée aussi, en appellant z, ce que nous appellons ici y.

XVI. Il est encore à remarquer que dans le cas du nomb. 1. de l'art. 13. si au lieu de AH (x) on prend les TH ou $BH = r$ pour abscisses, & qu'à la place de x & de dx, on restituë leurs valeurs $r+a$, dr, dans l'équation $\sqrt{vv-1} = \frac{zdx + adz - xdz}{xdx - adx + zdz}$ de ce cas; cette équation se changera ici en $\sqrt{vv-1} = \frac{zdr - rdz}{rdr + zdz}$: De sorte que dans l'hypothese ordinaire ayant la vîtesse $v = \sqrt{AH} = \sqrt{r+a}$, si l'on fait $a = 1$; l'on aura aussi $\frac{zdr - rdz}{rdr + zdz} (\sqrt{vv-1}) =$

$\sqrt{\overline{r+a-1}}=\sqrt{r}$, ou $\overline{zdr-rdz}\times\sqrt{a}=\overline{rdr+zdz}\times\sqrt{r}$ pour l'équation de ce même cas.

XVII. Cette équation comparée avec celle qu'on vient de trouver dans l'art. 15. fait voir que si l'on change les indéterminées, r (TH) & z (HL) en deux autres y (TF) & t (LT); & qu'on considere que K en A, ou $TL=TA$ donne

$$TE(a).\ TL(t) :: \begin{cases} TF(y).\ TH(r)=\frac{ty}{a}. \\ FE(\sqrt{aa-yy}).\ HL(z)=\frac{t}{a}\sqrt{aa-yy}. \end{cases}$$

L'on aura deux valeurs de r & de z qui substituées en leurs places dans cette équation $\overline{zdr-rdz}\times\sqrt{a}=\overline{rdr+zdz}\times\sqrt{r}$, de l'art. 16. la changeront en la précédente $\frac{dy}{\sqrt{aay-y^3}}=\frac{dt}{\sqrt{t}}$ de l'art. 15. dont les indéterminées ne sont plus mêlées, mais separées d'une maniere qui en rend la construction aisée par des quadratures ou des rectifications de Courbes.

XVIII. L'équation $\sqrt{vv-1}=\frac{dz}{-dx}$ du nomb. 1. de l'art. 14. pour le cas où le corps tombant de AG le long de la Courbe cherchée, doit s'approcher ou s'éloigner également de l'horizon, donne aussi la parabole quarre-cubique, ainsi qu'elle a déja été trouvée ci-dessus dans les art. 4. & 8. pour l'hypothese ordinaire des vîtesses des corps en tombant. Car cette hypothese donnant la vîtesse $v=\sqrt{AH}=\sqrt{x}$; l'on aura $\frac{dz}{-dx}(\sqrt{vv-1})=\sqrt{x-1}$, ou (en prenant ici $p=1$) $dz\sqrt{p}=-dx\sqrt{x-p}$, dont l'intégrale est $-z\sqrt{p}=\frac{2}{3}\times\overline{x-p}^{\frac{3}{2}}$, ou plûtôt $\frac{9}{4}pzz=\overline{x-p}^3$ (soit $x-p=n$) $=n^3$, ainsi qu'on l'a trouvée jusqu'ici, n'y ayant de difference qu'en ce que les ordonnnées (z) en seroient ici négatives. FIG. 5.

Mais s'il étoit indifferent de quel point de l'horizontale AG le corps tombât, & que la distance arbitraire de ce point au point A fût $=e$ constante; l'intégrale de $-dz\sqrt{p}=dx\sqrt{x-p}$, se trouveroit aussi être $\overline{e-z}\times\sqrt{p}=\frac{2}{3}\times\overline{x-p}^{\frac{3}{2}}$, c'est-à-dire (en faisant encore $x-p=n$, &

$e - z = m$) $m\sqrt{p} = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$, ou $\frac{9}{4} p\,mm = n^3$, qui exprimeroit encore la même parabole quarrée cubique placée ſeulement ſur un autre axe vertical diſtant de AB de la valeur de e: De maniere que ces deux paraboles ſemblablement poſées ſur leurs axes paralleles, ſeroient auſſi paralleles entr'elles, & à même diſtance (p) de leurs ſommets à l'horizontale AG; laquelle diſtance marqueroit les hauteurs des chûtes propres à donner aux corps qu'on ſuppoſe ſe mouvoir le long de ces Courbes, les vîteſſes avec leſquelles ils devroient commencer à leurs ſommets, pour approcher également en tems égaux de l'horizontale XO.

XIX. Quant à l'équation $\sqrt{vv - 1} = \frac{dx}{dz}$ du nomb. 2. de l'art. 14. Si l'on ſubſtituë de même à l'ordinaire $\sqrt{x - 1}$ pour $\sqrt{vv - 1}$, l'on aura $\sqrt{x - 1} = \frac{dx}{dz}$, ou $dz = \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$, dont l'intégrale eſt $z = 2\sqrt{x - 1}$, ou $zz = 4x - 4$: c'eſt-à-dire (en prenant encore $p = 1$) $zz = 4px - 4pp$ (ſoit encore auſſi $n = x - p$) $= 4pn$, qui eſt un lieu à la parabole ordinaire. D'où l'on voit qu'un corps qui tomberoit le long de la convexité de cette Courbe, en commençant à ſon ſommet avec une vîteſſe égale à ce qu'il en acquiêroit en tombant du quart de la hauteur du parametre de cette Courbe, s'éloigneroit de ſon axe vertical également en tems égaux.
FIG. 7. Ce qui eſt juſtement ce que Galilée avoit ſuppoſé pour prouver que cette Courbe eſt celle que décriroient les corps graves jettez horizontalement dans le vuide.

XX. Enfin il eſt à remarquer que cette derniere Parabole ne ſe trouve être la Courbe cherchée, qu'en ce que les tems pris par rapport aux diſtances du point T au corps qui la décrit, ſe trouvent ici comme les éloignemens de ce corps à l'axe de cette Courbe. C'eſt ce qui fait que lorſque dans l'éloignement infini de ce point, LT ſe trouve oblique à l'horizon, l'équation trouvée ci-deſſus (*n.* 3. *art.* 14.) par rapport aux approches à même point, ne ſeroit point à la parabole, quoique réduite à l'hypotheſe de Galilée: il faudroit pour cela prendre les tems ſur LT comme les éloignemens de ſon axe au corps qui la décriroit. Par exemple ici (outre lS perpendiculaire ſur LT,

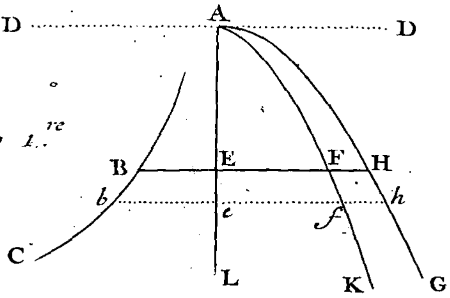

fig. 1.re

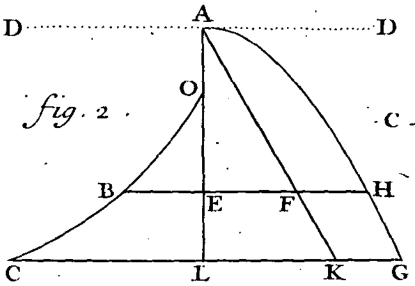

fig. 2.

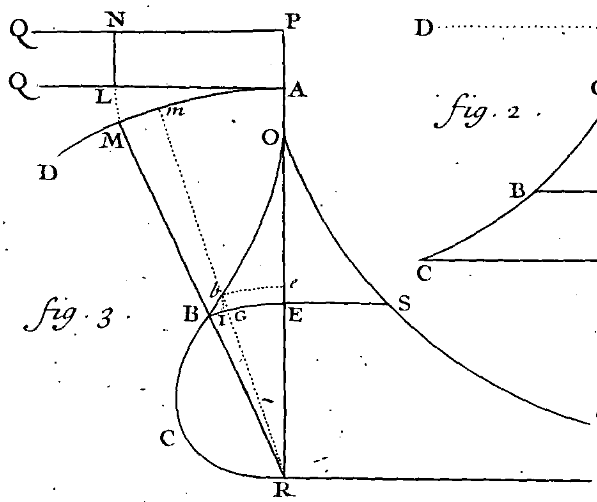

fig. 3.

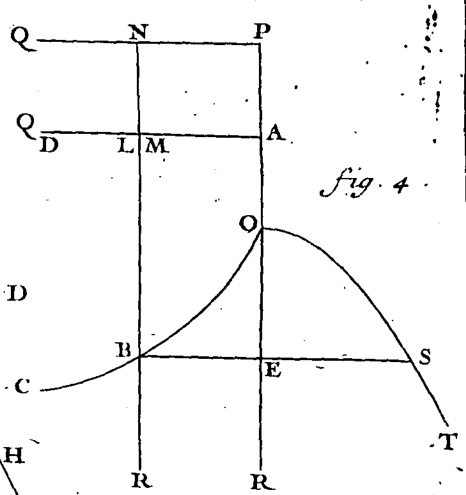

fig. 4.

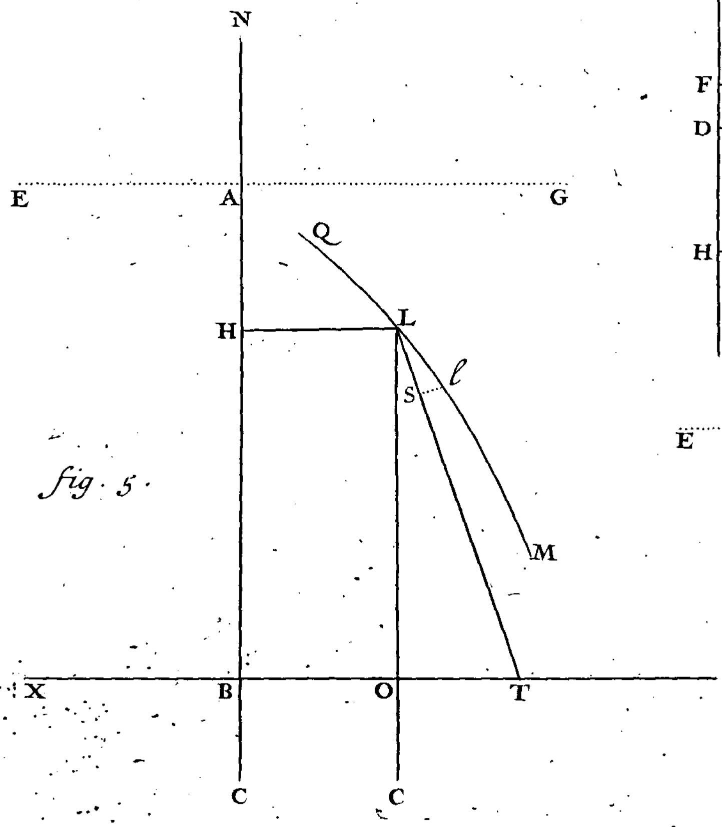

fig. 5.

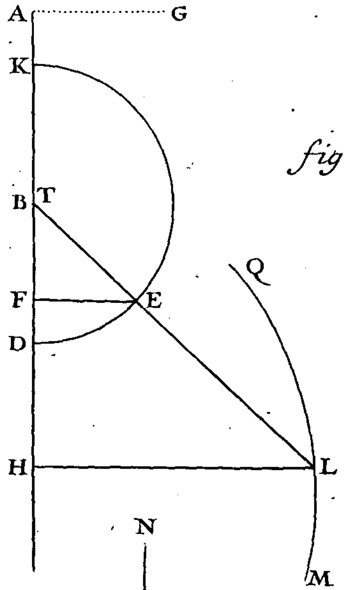

fig. 6.

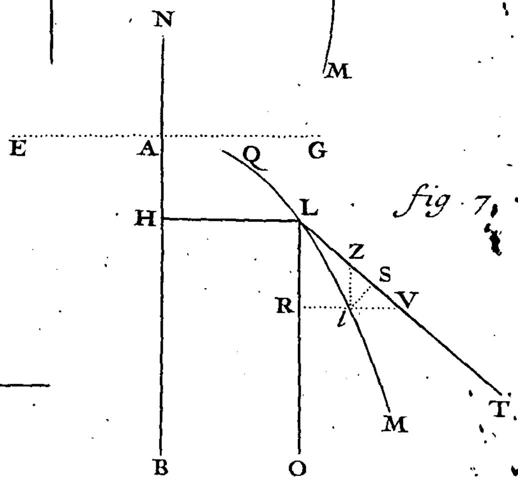

fig. 7.

ſoit de plus lZ parallele à AB) au lieu des inſtans $dt = LS$, comme on les a pris juſqu'ici, il faudroit prendre $dt = LZ$; & alors la Courbe QLM ſeroit encore ici une vraie Parabole conique, ou du premier genre.

En effet (tout le reſte demeurant comme cy-deſſus, avec RlV, parallele à AG) la raiſon conſtante de $LR\,(dx)$ à RV, par exemple $::p.\,q.$ donneroit $RV = \frac{qdx}{p}$; & par ainſi $LV = \frac{dx}{p}\sqrt{pp+qq}$ (ſoit $nn = pp+qq$) $= \frac{ndx}{p}$. Or $RV\left(\frac{ydx}{p}\right).\,Rl\,(dz)::LV\left(\frac{ndx}{p}\right).\,LZ\,(dt) = \frac{ndz}{q}$. De plus $Ll = \sqrt{dx^2+dz^2}$. Donc, ayant en général la vîteſſe $v = \frac{Ll}{dt}$, l'on auroit auſſi $v = \frac{q\sqrt{dx^2+dz^2}}{ndz}$, pour toutes les hypotheſes imaginables de vîteſſes : de ſorte qu'en faiſant $v = \sqrt{x}$ ſuivant Galilée, l'on auroit enfin $\sqrt{x} = \frac{q\sqrt{dx^2+dz^2}}{ndz}$: laquelle équation ſe réduit à $dz = \frac{qdx}{\sqrt{nnx-qq}}$, dont l'intégrale eſt $z = \frac{2q}{nn}\sqrt{nnx-qq}$ $\left(\text{ſoit } y = x - \frac{qq}{nn}\right) = \frac{2q}{n}\sqrt{y}$, ou $zz = \frac{4qqy}{nn} = \frac{4qqy}{pp+qq}$, qui eſt encore un lieu à la parabole ordinaire. Ce qui s'accorde auſſi avec la doctrine de Galilée touchant la Courbe que décriroient les corps graves jettez obliquement dans le vuide. D'où ſe déduit encore l'art. 19. pour le cas des projections horizontales, dans lequel q ſe trouveroit infinie.

OBSERVATIONS

DE L'ECLIPSE DE LUNE

arrivée le 15. Mars au ſoir 1699.

Par M. CASSINI.

POUR obſerver l'Eclipſe de Lune du 15 Mars de cette année 1699. on avoit préparé des inſtrumens ſur la 18. Mars 1699.