# Lois de Kepler et de Newton.

A partir des observations de Tycho Brahé, Kepler a constaté en 1609 que l'orbite de la planète Mars était elliptique et non un cercle.

Il a énoncé alors les 2 premières lois, complétées en 1619 par la 3ème loi.

1) l'orbite d'une planète est une ellipse dont le soleil occupe un des foyers.

2) le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux.

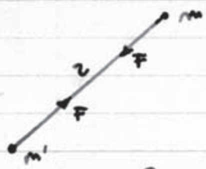
3) le carré de la durée de révolut° est proportio/elle au cube du grand axe de l'ellipse : $\frac{T^2}{a^3} = c^{te}$

En réalité la 3ème loi est une approximat° valable ds le système solaire, car on peut négliger la masse d'une planète / à la masse du soleil.

Loi de l'attract° universelle de Newton (1687).

On peut retrouver les lois de Kepler à partir de la loi de l'attract° universelle.

La 3ème loi peut-être retrouvée sous sa forme générale (applicable pour des * doubles).

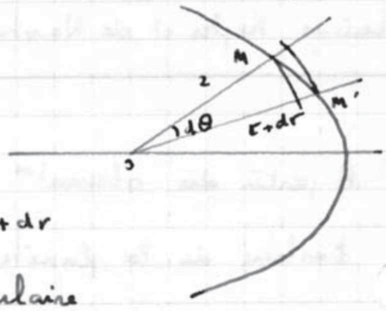



La force est proportio/elle aux masses et invers$^t$ proportio/elle au carré des distances. $F = -G \frac{m m'}{r^2}$

$G = 6,670 \cdot 10^{-27}$ dynes $cm^2\, gr^{-2}$ ou $cm^3\, gr^{-1}\, s^{-2}$

Si on a un corps de couches sphériques homogènes tout se passe comme si toute la masse était concentrée en son centre.

a) 2ème loi de Kepler



La force passe par un point fixe O.

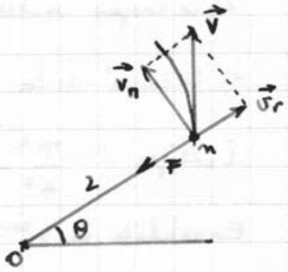
OM : rayon vecteur à un instant t.

OM' : — — — — — $t+dt$ . $OM' = r + dr$

L'aire balayée dA est comprise entre secteur circulaire d'angle $d\theta$ et de rayon $r$ et le secteur circulaire d'angle $d\theta$ et de rayon $r+dr$

$\frac{1}{2} r^2 d\theta < dA < \frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta \qquad dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = c^{te}}$$



Ceci découle qu'il y a une force centrale et le moment de la force / à O = 0.

Le théorème du mo^t^ ciné^que^ nous apprend que :

$M_O^t$ de la force $f = \frac{d}{dt}(M_O^t / \text{à } O \text{ du vecteur } m\vec{V}) = 0$

Donc Moment ciné^o^ de $m\vec{v} = c^{te}$

$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_n}$ . La vitesse radiale n'intervient pas ds le mo^t^ / à O.

$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_n = r\frac{d\theta}{dt}$

$M_O^t \; m\vec{v} = r(m\, v_n) = m r^2 \frac{d\theta}{dt} = c^{te}$

$$\boxed{r^2 \frac{d\theta}{dt} = C}$$ C : $c^{te}$ des aires.

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2}$

b) 1ère loi de Kepler

Express^o^ de la vitesse orbitale de ●.

$$v^2 = v_r^2 + v_n^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{C}{r^2}$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\frac{C^2}{r^4} + r^2\frac{C^2}{r^4} = C^2\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = C^2\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}$$

$$\boxed{v^2 = C^2\left[\left(\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]}$$ 1ère formule de Binet.

On appl^e le théorème des forces vives au point M. $F = m\gamma$. $d\mathcal{T} = m\gamma\, dr$.

$$d\mathcal{T} = m\gamma\, dr = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\frac{m}{2}d(v^2) = m\gamma\, dr \qquad \gamma = \frac{d(v^2)}{2\,dr}$$

$$\frac{d(v^2)}{dr} = \frac{d(v^2)}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dr}\left[\cancel{2}C^2\left[2\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\cdot\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + 2\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\right]\right]$$

$$\frac{d(v^2)}{dr} = 2C^2\frac{d\theta}{dr}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$\gamma = C^2\frac{d\theta}{dr}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\gamma = -C^2\frac{d\theta}{dr}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$\boxed{\gamma = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]}$$ 2ème formule de Binet.

• Mouv^t relatif d'une des masses / à l'autre.

L'accélérat° absolue produite sur m' par l'attract° de m est :

$$\gamma_1 = -G\frac{m}{r^2}$$

l'accélérat° absolue de m' sur m : $\gamma'_1 = G \frac{m'}{r^2}$

l'accélérat° relative de m'/à m est la différence des accél. $\gamma_1$ et $\gamma'_1$ :

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma'_1 = -G \frac{(m+m')}{r^2}$$

$\gamma$ relatif est donnée par la 1ère formule de Binet :

$$-\frac{G(m+m')}{r^2} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$G(m+m') = C^2\left[\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right]$$

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{G(m+m')}{C^2}$$

Equat° différentielle de la trajectoire. on pose $\frac{G(m+m')}{C^2} = \frac{1}{p}$

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \Rightarrow r = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos(\theta-\theta_0)$$

La forme de l'orbite dépend de e :

si $e < 1$ on a une ellipse

$e = 1$ - - - parabole

$e > 1$ - - - hyperbole.

De la 1ère formule de Binet, on remplace $\frac{1}{r}$ et $\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta}$ par les valeurs

trouvées $\frac{d(\frac{1}{r})}{d\theta} = -\frac{e}{p}\sin(\theta-\theta_0)$

$$v^2 = C^2\left[\frac{e^2}{p^2}\sin^2(\theta-\theta_0) + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$\cos^2(\theta-\theta_0) = \frac{p^2}{e^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2$$

$$\frac{e^2}{p^2}\sin^2(\theta-\theta_0) = \frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2$$

$$v^2 = C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$v^2 = C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{rp} + \frac{1}{r^2}\right]$$

$$v^2 = C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{pr}\right] = \frac{C^2}{p}\left[\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right]$$

On peut négliger m' / à m. On a:

$$\frac{1}{p} = \frac{Gm}{C^2} \qquad \frac{C^2}{p} = Gm$$

$$v^2 = Gm\left[\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right]$$

Ds le cas de la parabole, $e = 1$ $\quad v^2 = \frac{2Gm}{r}$

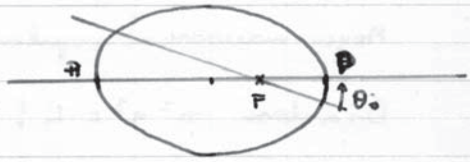
$V_p = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$ $\qquad$ ellipse $e < 1$ $\qquad v < v_p < \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$

parabole $e = 1$ $\qquad v = v_p$

hyperbole $e > 1$ $\qquad v > v_p$.

La valeur minimum du rayon vecteur correspond à

$\cos(\theta - \theta_0) = 1$, $\theta - \theta_0 = 0$




$\theta_0$ représente l'angle que forme la ligne des abscisses avec l'axe choisi. On prend $\theta_0 = 0$.

$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ $\qquad$ au minimum: $r = r_P = \frac{p}{1+e}$

Distance périhélie (périastre) $r_P = a - c$

$r_A$ est maximum à l'aphélie (apoastre) $\quad r_A = \frac{p}{1-e} = a + c$

$p\left[\left(\frac{1}{1+e}\right) + \left(\frac{1}{1-e}\right)\right] = \frac{2p}{1-e^2} = 2a$ $\qquad \boxed{p = a(1-e^2)}$

$p\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}\right) = 2c$

$p\,\frac{2e}{1-e^2} = 2c$ $\qquad p = c\,\frac{1-e^2}{e}$ $\qquad ae = c$ $\qquad \boxed{e = \frac{c}{a}}$ excentricité de l'ellipse

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}}$$

Ds $p = a(1-e^2)$ on remplace $p$ par $\dfrac{C^2}{G(m+m')}$

$$\frac{C^2}{G(m+m')} = a(1-e^2)$$

Pendant la durée T d'une période, le rayon vecteur balaye l'ellipse entière.

Aire balayée : $\pi ab$ $\qquad b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1-e^2) \qquad b = a\sqrt{1-e^2}$

$$\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

Vitesse aérolaire moyenne : $\dfrac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} = \dfrac{C}{2}$

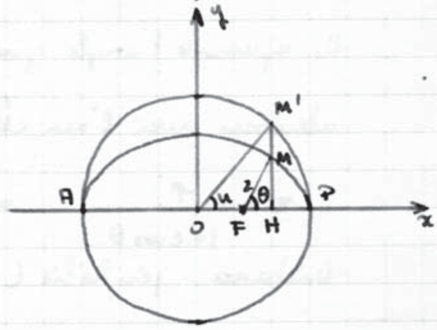
$$C = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}$$

$$\frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{G(m+m')T^2} = a(1-e^2) \qquad \frac{4\pi^2 a^3}{G(m+m')T^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = G(m+m') \sim Gm}$$

Moyen mouvement angulaire, la vitesse angulaire moyenne $\dfrac{2\pi}{T} = n$

On a donc $n^2 a^3 = G(m+m')$




## Etude du mvt elliptique.

On remplace $r$ et $\theta$ par une variable unique

l'anomalie excentrique $u$, est l'angle que forme

le rayon OM' avec l'axe des $x$. Soit $y$ ordonnée de M.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

M' même abscisse que M, et $(x, y')$ de M'. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{a^2} = 1$

$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad \frac{y}{y'} = \frac{b}{a} \qquad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad \frac{y}{y'} = \sqrt{1-e^2}$$

Il faut trouver $r$ en fonct° de $u$ et $\dfrac{d\theta}{dt}$ en fonct° de $u$.

$$x = c + r\cos\theta = a\cos u$$

(1) $r\cos\theta = a\cos u - c = a(\cos u - e)$

$$\frac{r\sin\theta}{a\sin u} = \sqrt{1-e^2} \qquad r\sin\theta = \sqrt{1-e^2}\ a\sin u$$

$$r^2 = (1-e^2)\,a^2\sin^2 u + a^2(\cos u - e)^2$$

$$r^2 = a^2\left[\cos^2 u + e^2 + \sin^2 u - e^2\sin^2 u - 2e\cos u\right] = a^2\left[1 - 2e\cos u + e^2\cos^2 u\right]$$

$$r^2 = a^2(1-e\cos u)^2$$

(2) $r = a(1-e\cos u)$ (I)

On cherche $\theta$ en fonct° de $u$, on part de (1)

$$r\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = a(\cos u - e)$$

$$r\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = a(1-e\cos u)$$

par additi°: $2r\cos^2\frac{\theta}{2} = a(\cos u - e + 1 - e\cos u) = a(1-e)(1+\cos u)$

par soustract° $2r\sin^2\frac{\theta}{2} = a(1-e\cos u - \cos u + e) = a(1+e)(1-\cos u)$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{(1+e)}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u} = \frac{1+e}{1-e}\,\frac{\sin^2\frac{u}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}} = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{u}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \operatorname{tg}\frac{u}{2} \quad (\text{II})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

$$\frac{d\theta}{du} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \frac{1-e}{1-e\cos u} = \sqrt{1-e^2}\ \frac{1}{1-e\cos u}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\ \frac{du}{dt}$$

<u>loi des aires</u>

$$a^2(1-e\cos u)\sqrt{1-e^2}\ \frac{du}{dt} = C = \frac{2\pi}{T}\ a^2\sqrt{1-e^2} = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

$(1-e\cos u)\ \frac{du}{dt} = n$ $\boxed{(1-e\cos u)\ du = n\, dt}$

$\boxed{u - e\sin u = n(t-t_0)}$ Equat° de Kepler.

On pose $n(t-t_0) = M$ $\boxed{u - e\sin u - M = 0}$ (III)

$t = t_0$ pour $u = 0$

$r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ (IV)

Problème 1) Calculer l'instant t du passage de la planète par une posit° donnée de l'orbite.

2) Calculer la posit° d'une planète à une époque donnée.

1) Données $\theta$, $r$, $e$, $t_0$ - inconnu $t$.

On calcul $u$ par équat° (II), on porte cette valeur ds l'équat° (III), et on obtient $t - t_0$ - (Pb. résolu).

2) Données: $t$, ($t_0$, $n$ - $e$) inconnus $r$ et $\theta$.

On commence par prendre équat° (III) : on a $u$. On calcule $\theta$ par l'équat° (II) et $r$ par équat° (I) (IV) sert de vérificat°.

Résolut° de l'équat° de Kepler (résolue par approximat°). On se donne $u_0$ et $u$ approchés et on l'améliore.

$u = M + e\sin u$ $M < u < M+e$.

On peut l'améliorer : on forme $f(u_0) = u_0 - e\sin u_0 - M$ et

$f'(u_0) = 1 - e\cos u$

$$u_1 - u_0 = -\frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = -\frac{u_0 - e\sin u_0 - M}{1 - e\cos u_0}$$

1) partir d'une valeur déjà approchée. Entre $M$ et $M+e$, on choisit une valeur assez approchée telle que $f(u_0) < 0$ et $f'(u_0') > 0$.

Remarque $u$ est en radian, si on a $u$ en degré.

On peut écrire la formule de Kepler sous forme en degré.

$$n(t - t_0) = u - e\sin u$$

$$u^{(0)} - \frac{180}{\pi} e \sin u - M^{(0)} = 0 \qquad (57,29578)$$

Cas où l'excentricité est très petite.

On peut prendre cop 1ère valeur $u = M$ et cop 2ème $u_1 = M + e\sin u_0$

$$u_2 = M + e\sin u_1 = M + e\sin(M + e\sin u_0)$$

$$u_2 = M + e\left[\sin M \cos(e\sin u_0) + \cos M \sin(e\sin u_0)\right]$$

$$u_2 = M + e\left[\sin M \cos(e\sin u_0) + \cos M \; e\sin M\right]$$

$$u_2 = M + e\sin M + e^2 \sin M \cos M$$

$$u_2 = M + e\sin M + \frac{1}{2} e^2 \sin 2M$$

$$u^{(0)} = M^{(0)} + \frac{180}{\pi} e\sin M + \frac{180}{\pi}\frac{e^2}{\pi}\sin 2M.$$