Système des satellites de Jupiter sous Géogébra
Partie II - vu de la Terre

Les satellites de Jupiter représentent une très bonne illustration d'un système képlérien simple si l'on ne prend pas en compte les faibles perturbations des orbites :

- orbites circulaires (ellipse e=0)
- orbites planes (dans le plan équatorial de Jupiter)
- périodes suivant la 3ème loi de Kepler

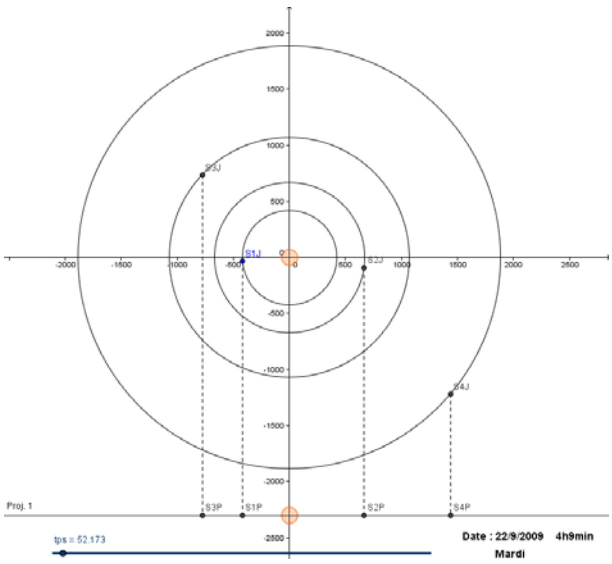
Dans le TD 1 avec le support de Géogébra il a été construit un modèle animé temporellement :

- avec vue au-dessus de pôle de Jupiter
- vue dans le plan équatorial dans une direction perpendiculaire à la direction du point vernal
- et en option dynamique temporelle pour un suivi au cours du temps

Dans ce deuxième TD, on va **se placer sur la Terre** pour voir plus réellement ce que l'on observe.

Données du TD

On part de l'animation précédente (*plajosat_sysol0.ggb*) avec sa direction de visée et les données de base :



	A	B	C	D	E
1		Période	Rayon	demis-axes	long. orig.
2	Io	1.8	1821.3	422000	190°
3	Europe	3.6	1565	671000	175°
4	Ganymède	7.2	2634	1070000	48°
5	Callisto	16.7	2403	1883000	275°
6	Jupiter	4332.59	71492	5.2	320.7°
7	Terre	365.25		1	308.75°
8					
9		Date orig.	Date		
10	Année	2009	2009		
11	Mois	8	9		
12	Jour	1	22		
13	Heures	0	4		
14	Minutes	0	9		

I - Modèle simplifié Soleil Terre Jupiter.

Créer un système Soleil-Terre-Jupiter qui soit fonction du temps.

– **Echelle du graphique** compatible avec les dimensions du graphique des satellites

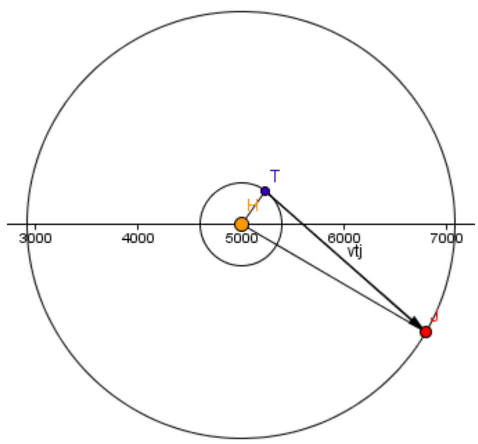
Unité en u.a. (unités astronomiques) ? échelle distance = x 400

gdist=400 cellule *B16*

Décalage du graphique :

Centre $x_H = 5000$; $y_H = 0$ cellule *B17* et *B18*

	A	B	C	D	E
16	g dist	400			
17	Décalage X	5000			
18	Décalage Y	0			



– **Orbites des planètes**

- le point Soleil *H* : *x_H = B17   y_H=B18   H=(x_H,y_H)*
- l'orbite de la Terre : cercle de centre *H* et rayon 1 x 400

  ct=cercle[(x_H,y_H),D7*gdist]
- l'orbite de Jupiter : cercle de centre *H* et rayon 5.2 x 400

  cj=cercle[(x_H,y_H),D6*gdist]

Cacher les étiquettes des cercles.

– Positions des planètes

Calculer les longitudes des deux planètes en fonction du temps

Vitesse angulaire = 360 / période

*lt=(360/B7)*tps+E7*

*lj=(360/B6)*tps+E6*

Placer les points des planètes (*T* et *J*) en coordonnées polaires et faire la translation
Soit le point *O=(0,0)*, alors

*T=translation[(D7*gdist;lt),vecteur[0,(x_H,y_H)]]*

*J=translation[(D6*gdist;lj),vecteur[0,(x_H,y_H)]]*

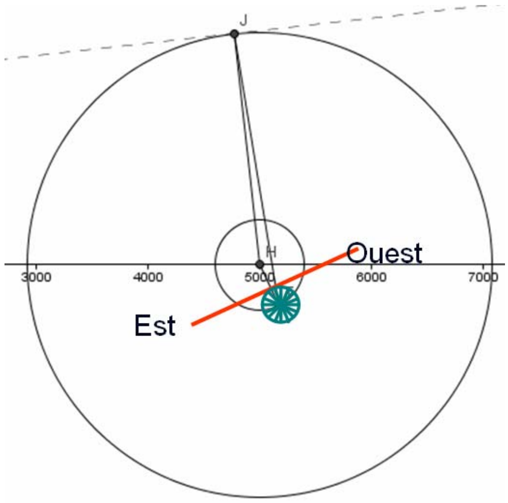
Tracer les segments Soleil-planètes et Terre-Jupiter :

sht=segment[H,T]

shj=segment[H,J]

stj=segment[T,J]

Enlever les étiquettes



– Positions de Jupiter (Facultatif)

Le graphique permet de savoir où se trouve Jupiter dans le ciel à une date donnée.
Orientation du graphique pour un observateur à midi.
- horizon et Soleil au plus haut
- Est et Ouest suivant rotation de la Terre

Déterminer la position relative de Jupiter par rapport au Soleil
- même direction : conjonction, non visible
- à 180° : opposition, visible toute la nuit
- à l'Ouest : visible plutôt le matin
- à l'Est : visible plutôt le soir

On peut faire afficher l'élongation de Jupiter : angle *HTJ*.

elong=Angle[H, T, J]

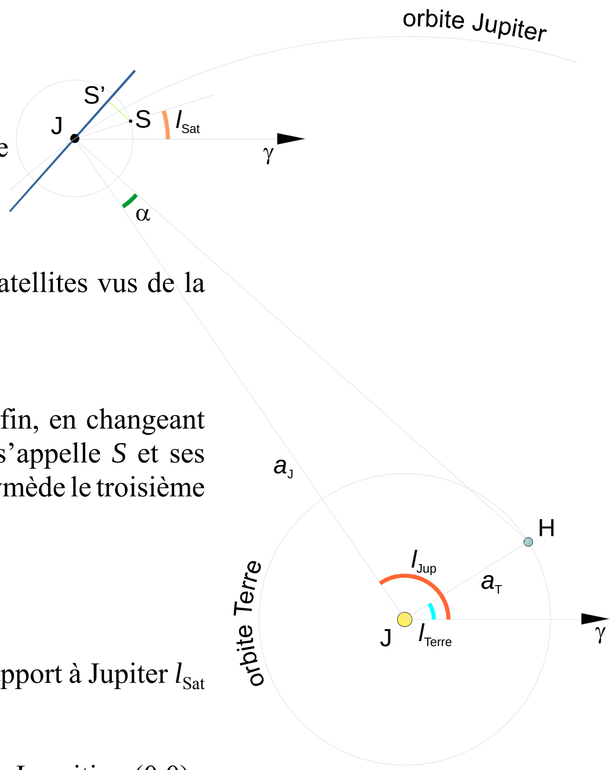
Elongation : distance angulaire Soleil-planète.

II - Les satellites vus de la Terre

La direction de visée est *JT*
La vision terrestre est la projection sur une droite perpendiculaire à la direction Terre-Jupiter.
- Construire le vecteur Terre-Jupiter :

vtj=vecteur[T, J]

Cette droite donnera la direction de la vision de Jupiter et des satellites vus de la Terre..



– Position du problème

La construction se fait avec un satellite, que l'on duplique à la fin, en changeant d'indice (S1, S2...). Dans la construction présente, le satellite s'appelle *S* et ses projections successives *S'*, *S''*, *S'''*. Dans le fichier ggb, c'est Ganymède le troisième qui est utilisé.

Connaissant à une date *t* :
- la longitude héliocentrique de la Terre l_{Terre}
- la longitude héliocentrique de Jupiter l_{Jup}
- les rayons des orbites a_{Terre} et a_{Jup} la position des satellites par rapport à Jupiter l_{Sat}

– Projection

On peut construire la droite de projection perpendiculaire à TJ en J position (0,0) :

dproj=Perpendiculaire[O, stj]

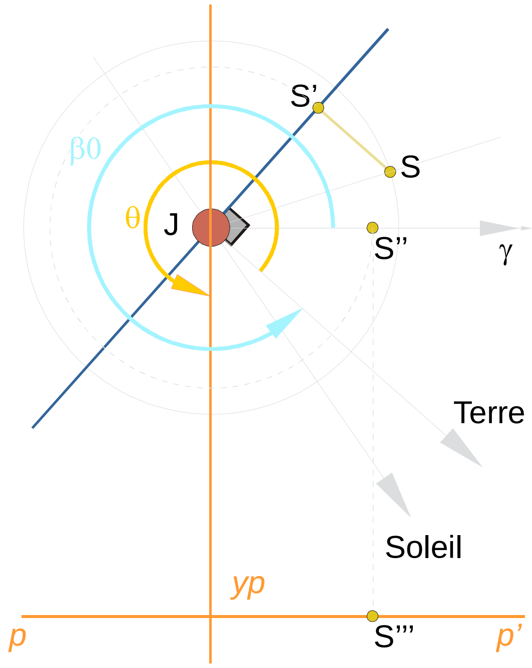
Placer *S'* projection de *S*, intersection de la perpendiculaire à *dproj* passant par *S* :

S'=Intersection[dproj, Perpendiculaire[S, dproj]]

Remarque : par simplicité, on projette orthogonalement (SS'), mais réellement il faudrait trouver l'intersection de TS avec la droite de projection.

La différence est négligeable. Voir plus loin, calcul de l'erreur).
La distance Terre Jupiter est au minimum de 4.2 u.a. soit plus de 600 000 000 de km et la distance la plus grande d'un satellite est de 1 883 000 km.

– Droite de projection des satellites



Le satellite se projette en *S'*
Pour la lisibilité, les projections seront tournées et translatées en ordonnées sur *pp'*.
Quelles opérations faire ?
1 – *Rotation* pour amener *JT* verticalement dirigé vers le bas, direction de visée.
Angle du vecteur *JT* : β0
La direction Jupiter-Terre doit tourner de θ angle du vecteur *JT* :

θ = 270°-β0

S' vient en *S''*
2 – *Translation* de *yp* en ordonnées

Dans Géogébra :

1 – Projection - intersection

dproj=Perpendiculaire[O, stj]
S'=Intersection[dproj, Perpendiculaire[S, dproj]]
β0 = *Angle[Vecteur[O, (100, 0)], Vecteur[J, T]]*

2 - Rotation

θ = *270°-β0*
*S''=Rotation[S',*θ*,O]*

3 – Translation de yp en ordonnées

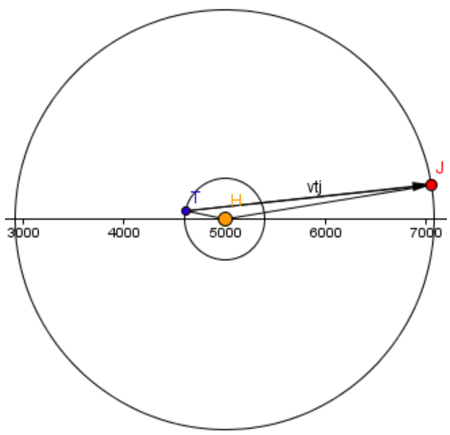
Le point de projection définitif *S'''*sera :

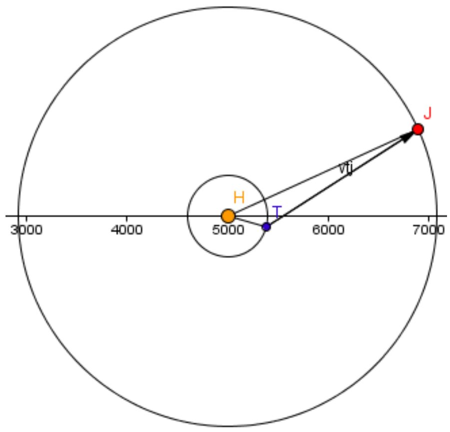
S'''=Translation[Rotation[Intersection[dproj,Perpendiculaire[S3J, dproj]],θ, 0],Vecteur[O, (0, y0 + B20)]]

projection de *S*
yp
intersection *S'*
rotation de θ
translation de *yp*

– Influence de la distance

Les angles sous lesquels on voit Jupiter et ses satellites est aussi fonction de la distance Terre Jupiter.





- Calculer la plage de variation en u.a. et en % ?
  La distance lle peut varier de 4.2 à 6.2 u.a., soit +/-19.2 %

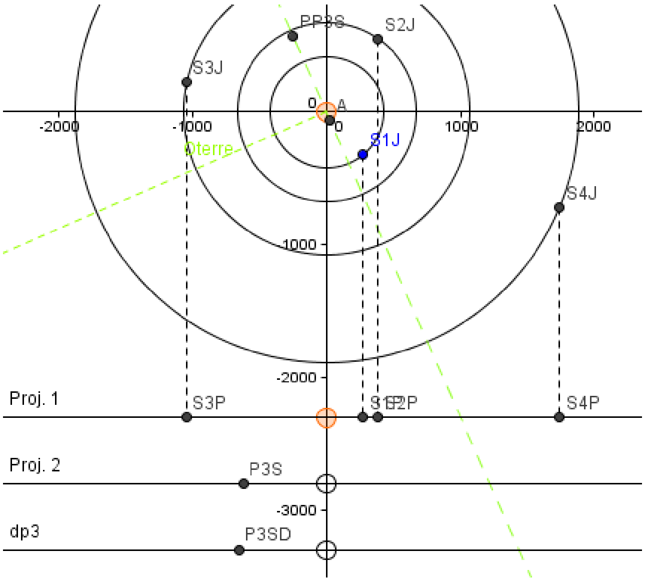
C'est l'ensemble Jupiter et satellites qui paraîtra plus ou moins grand.

Représenter sur une troisième droite de projection, d'ordonnée *yp*' (décalage y0+B20+B21), les positions projetées des satellites décalées par la distance.
On prendra la projection déjà construite comme projection moyenne, celle où Jupiter est à 5.2 u.a. de la Terre.

L'abscisse du point de projection du satellite variera comme l'inverse de la distance *TJ*.
L'abscisse du point de projection sera multiplié par le facteur 5.2/*TJ*

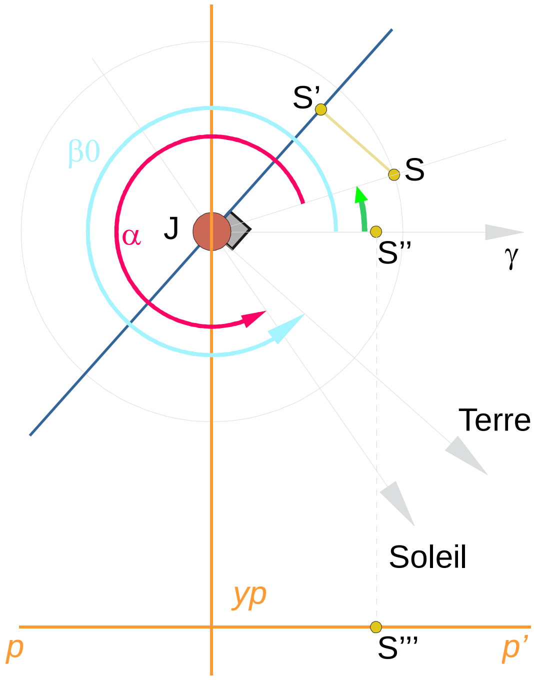
Point projeté du satellite :

PSD=(x(P3S) 5.2 / (Longueur[vtj]/ gdist),y0 + B20 + B21)



Remarque : si l'on trace un cercle représentant Jupiter, il faudra aussi tenir compte des variations de son rayon avec la distance.

III – Eclipses



Il est possible de simuler les éclipses des satellites par Jupiter.
Conditions pour avoir une éclipse ?
- dans la projection le satellite doit être en arrière de Jupiter
- être à moins d'un rayon de Jupiter

On connaît la longitude jovicentrique du satellite $\beta = \gamma JS = l_S$

$$\alpha = SJT = \beta 0 - l_S$$

Si on a pour α :

$$90° < \alpha < 270°$$

Le satellite est en arrière de Jupiter .

La distance Jupiter Satellite est donnée par son abscisse : *x(S'')*

Test avec Géogébra
- pour savoir si le satellite est en avant ou en arrière et près de Jupiter :

$$\alpha > 90 \wedge \alpha > 270$$

Si le test vrai, il est derrière, s'il est faux devant.

- test distance à Jupiter. *Le satellite sera à l'intérieur du cercle de Jupiter si :*

$$abs(x(S''')) < C6 / 1000$$

Test complet :

$$\alpha > 90° \wedge \alpha < 270° \wedge abs(x(P_S)) < C6 / 1000$$

Créer pour chaque satellite *fecl* (*f* comme flag ou drapeau de test) la variable logique (booléenne) qui servira à l'affichage du point du satellite.

$$fecl = \alpha > 90° \wedge \alpha < 270° \wedge abs(x(P_S)) < C6 / 1000$$

qui ne prend que les valeur *true* (vraie) ou *false* (faux).

Pour la projection tenant compte de la distance Terre-Jupiter, il faut adapter le rayon limite de à la distance d'éclipse.

IV - Tracée des configurations temporelles

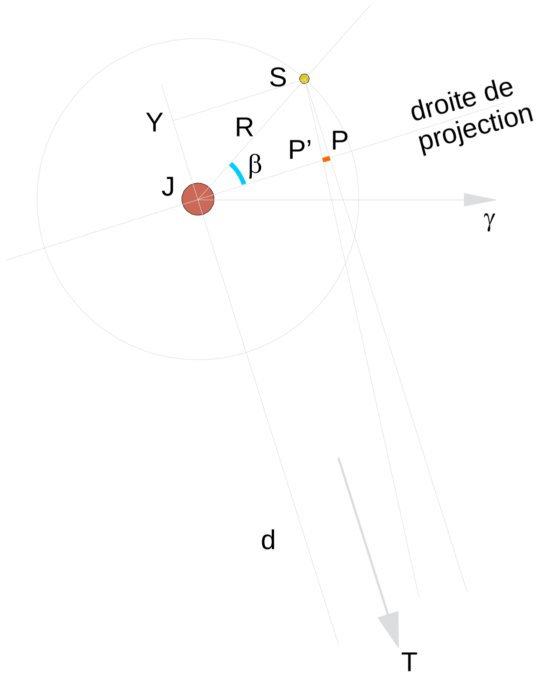
Comme dans le TD1, on peut tracer les configurations temporelles en faisant croître les ordonnée des satellites.
Il faudra alors activer la trace des points PxSD

V - Erreur due à l'effet de projection

En projetant suivant une direction parallèle à l'axe Terre-Jupiter et non la direction terre Satellite on fait une approximation.
La direction vraie de vision est *TP'S* et l'on utilise *SP*. L'erreur est

e = *PP'*.

Calculer de l'erreur.



Le satellite est repéré par le rayon *R* de son orbite et l'angle β de *JS* avec la droite de projection.
Similitude des triangles *SPP'* et *SYT*

$$\frac{PP'}{SP} = \frac{YS}{YJ + JT}$$

$$\frac{e}{R\sin\beta} = \frac{R\cos\beta}{R\sin\beta + d}$$

Construction et calculs dans Géogébra en faisant varier l'angle β, c'est-à-dire le temps *tps*.
Faire tracer la variation de e en fonction de tps avec une échelle appropriée.
L'erreur pour Callipso, satellite le plus éloigné ne dépasse pas 3 km et l'erreur sur l'angle, Jupiter au plus près, vaut atan(3/((5.2-1)*150000000) soit 5/1000ème de secondes d'arc.