PROBLÊME DE GNOMONIQUE.

Tracer un Cadran analemmatique, azimutal, horizontal, elliptique, dont le ſtyle ſoit une ligne verticale indéfinie.

Par M. DE LA LANDE.

CE problème eſt un des plus compliqués de toute la Gnomonique, on en trouve une partie dans les livres, mais ſans démonſtration, & avec une conſtruction incomplète. J'avois parcouru les auteurs qui ont approfondi cette matière, tels que Oronce Finé [a], Munſter [b], Schoner [c], Voell [d], Henrion, Clavius de Challes [e], Ozanam [f], ſans y avoir rien trouvé de ſatisfaiſant à ce ſujet. Enfin j'ai été obligé de chercher moi-même une démonſtration du Cadran analemmatique énoncé dans les auteurs, en même-temps j'ai fait en ſorte qu'il pût ſervir à différentes latitudes, & j'ai formé une règle extrêmement ſimple pour trouver la place du ſtyle dans tous les mois de l'année, & dans tous les lieux où on voudra l'employer.

Ce cadran a des avantages qui le rendent intéreſſant; lorſqu'on le réunit ſur une même pièce de métal, avec un cadran horizontal ordinaire, comme on le voit dans notre *figure 5;* ils s'orientent mutuellement, ſans qu'on ait beſoin de méridienne ni de bouſſole, parce que l'un ayant un ſtyle incliné, & l'autre un ſtyle vertical, la marche en eſt aſſez différente pour que leur accord ſoit une preuve de l'exactitude de la ſituation.

[a] *Orontii Finei opera*, fol.

[b] *Horogiolographia per Sebaſtianum Munſterum.* Baſileæ, 1533.

[c] *Gnomonice, Schoner*, in-4.°

[d] *De horologiis Sciothericis libri III à Joanne Voello, Soc. J.* Turoni, 1608, in-4.°

[e] *Chriſtophori Clavii Bambergenſis ex Soc. J. horologiorum nova deſcriptio*, in-4.° 1599.

[f] *Demonſtratio & conſtructio horologiorum novorum autore Georgio Schonbergero, &c.*

Ce cadran a d'ailleurs un autre usage d'agrément. On peut le tracer dans un parterre, avec des fleurs ou des gazons, sans aucun style, il suffit que l'observateur se place sur le mois où l'on est; en tournant le dos au Soleil, il voit son ombre marquer l'heure qu'il est sur la circonférence du cadran.

Ce cadran a été appelé analemmatique, parce qu'on le traçoit par le moyen de la figure appelée *analemme*, dont nous parlerons ci-après, & que l'on voit *figure 4*.

Première partie de la construction.

Soit CN (*fig. 1*) la direction de la méridienne, CF une longueur prise à volonté pour l'unité & pour la largeur du cadran, perpendiculairement à la direction de la méridienne, on prendra la longueur CN égale au sinus de la hauteur du pole, pour un des lieux où l'on veut employer le cadran, on prendra un intervalle GC ou CD égal à la tangente de l'obliquité de l'écliptique, c'est-à-dire, de $23^d\ 28'$ pour le rayon CN; le point G & le point D seront ceux où le style devra être placé dans le temps des solstices: si l'on prend de même CA, CB égales aux tangentes des déclinaisons du Soleil pour le commencement de chaque mois, on aura la situation du style pour ces mêmes jours, qui sera du côté du midi dans le printemps & dans l'été, & du côté du nord, c'est-à-dire vers D en automne & en hiver.

DÉMONSTRATION.

La tangente de l'azimuth du Soleil à six heures est toûjours à la tangente de sa déclinaison, comme le rayon est au cosinus de la hauteur du pole. Soit PSC (*fig. 2*) le cercle horaire de six heures qui fait avec le méridien PZ un angle droit, ZS le vertical du Soleil, ZC le premier vertical ou celui qui est perpendiculaire au méridien, l'arc CM ou l'angle sphérique CZM l'azimuth du Soleil, CS sa déclinaison: le triangle ZPS est rectangle en P, ainsi par la propriété des triangles ſphériques rectangles, R : ſin. PZ :: tang. PZS : tang. PS :: cotang. azimuth : cotang. déclin. :: tang. déclin. tang. azim. car les tangentes ſont en raiſon inverſe des cotangentes.

Si la ligne FC (*fig. 1*) repréſente le rayon de ſix heures quand le Soleil eſt dans l'équateur, & qu'on ait pris CD, comme dans la conſtruction précédente, égale à la tangente de la déclinaiſon du Soleil pour un rayon qui eſt égal au coſinus de la latitude, c'eſt-à-dire = coſin. latid. tang. déclin. Cette ligne CD donnera un angle CFD égal à l'azimuth du Soleil, & FD ſera le rayon de 6 heures pour le temps où l'on a pris la déclinaiſon du Soleil.

Seconde partie de la conſtruction.

Pour trouver les points horaires & tracer la circonférence du cadran analemmatique, il faut conſidérer que l'équateur de la Terre étant projeté perpendiculairement ſur l'horizon d'un lieu donné, forme une ellipſe dont le petit axe eſt égal au ſinus de la hauteur du pole. Soit $LBKO$ (*fig. 3*) la projection de l'équateur, c'eſt-à-dire, l'ellipſe dont le petit axe CK eſt au grand axe CL comme le ſinus de la hauteur du pole eſt au rayon; ſi l'on diviſe le demi-cercle LEO de 15 en 15 degrés, parce que 15 degrés font une heure dans le mouvement journalier du Soleil; & ſi de chaque point de diviſion comme E on abaiſſe une perpendiculaire EBF, elle coupera l'ellipſe LBK au point B qui ſera le point horaire, & le ſtyle étant placé au point D comme dans la première partie de notre conſtruction, la ligne DB ſera la ligne horaire.

Démonstration.

Pour le démontrer, il faut chercher l'expreſſion de l'angle CDB ou BDM (*fig. 3*) qui eſt égal à l'azimuth du Soleil compté depuis le méridien, & faire voir que cette expreſſion eſt celle que fournit le triangle PZS (*fig. 2*) pour l'angle Z. La ligne CF ou BM qui lui eſt égale, eſt le ſinus de l'angle horaire en prenant CL pour rayon, & AE égal au nombre de degrés dont le Soleil eſt éloigné du méridien à l'heure donnée ſuivant notre conſtruction. D'ailleurs on ſait que pour décrire une ellipſe & la diviſer en heures, on décrit un cercle LA ſur le grand axe, & un autre cercle ſur le petit axe CK; on prend l'arc AE & l'arc KH, chacun égal à 60 degrés, ſi c'eſt pour quatre heures qu'on ait beſoin de trouver la ligne horaire; de 45 degrés, ſi c'eſt trois heures, &c. on tire les lignes EF, HM, parallèles aux axes de l'ellipſe; & leur point de concours B marque le point de l'ellipſe ou le point horaire cherché.

La ligne BF eſt égale à cof. angle hor. × ſin. latit. car elle eſt le coſinus de l'arc KB (que nous avons pris égal à l'angle horaire) dans un cercle dont le rayon eſt lui-même le ſinus de la latitude. La ligne CD = tang. décl. × coſ. latit. ſuivant la conſtruction précédente; donc DM = coſ. ang. hor. × ſin. latit. — tang. décl. × coſ. latit. la tangente de l'angle BDM ou $\frac{BM}{DM}$ ſera donc $\frac{\text{ſin. angle hor.}}{\text{coſ. angle hor.} \times \text{ſin. latit.} - \text{tang. déclin.} \times \text{coſ. latit.}}$.

Pour trouver dans la *figure 2* l'expreſſion de l'angle PZS, on remarquera que la perpendiculaire SX étant abaiſſée ſur le côté PZ, les ſinus des ſegmens PX & ZX doivent être en raiſon inverſe des tangentes des angles ſur la baſe P & Z, c'eſt-à-dire, que tang. $Z = \frac{\text{tang. } P \times \text{ſin. } PX}{\text{ſin. } ZX}$; mais ſin. ZX $=$ ſin. $(PZ - PX) =$ ſin. $PX \times$ coſ. $PZ -$ ſin. $PZ \times$ coſ. PX; donc $\frac{\text{ſin. } PX}{\text{ſin. } ZX} = \frac{\text{tang. } PX}{\text{coſ. } PZ \times \text{tang. } PX, - \text{ſin. } PZ}$; multipliant par tang. P, ſubſtituant pour tang. PX ſa valeur tang. PS coſ. P, & diviſant tout par tang. PS, on aura $\frac{\text{tang. } P \text{ ſin. } PX}{\text{ſin. } ZX} =$

$$\frac{\text{coſ. } P \text{ tang. } P}{\text{coſ. } PZ \text{ coſ. } P - \text{ſin. } PZ \text{ cot. } PS} = \frac{\text{ſin. } P}{\text{coſ. } P.\ \text{coſ. } PZ - \text{ſin. } PZ.\ \text{cot. } PS}$$

$$= \frac{\text{ſin. angle hor.}}{\text{coſ. angle hor. ſin. latit.} - \text{tang. déclin. coſin. latit.}}.$$

Ainſi l'expreſſion de l'angle Z dans le triangle ſphérique de la *figure 2*, eſt la même que celle de l'angle ADB dans la *figure 3*; donc la conſtruction donnera l'angle azimuthal pour l'heure cherchée, ainſi le cadran azimuthal ſera fait lorſqu'on aura divisé la ligne CD, & qu'on aura décrit l'ellipse LBG de la manière précédente.

La construction que donnent les anciens auteurs, est plus compliquée que celle-ci, & n'est pas aussi lumineuse, cependant nous la rapporterons encore pour pouvoir démontrer qu'elle se réduit aux mêmes expressions que la nôtre. Soit le méridien $AECZPB$ (*fig. 4*) P le pole, Z le zenith, EO le rayon de l'équateur, PO l'axe de la Terre, & le rayon du cercle de 6 heures, CX le rayon du parallèle dans lequel se trouve le Soleil pour un jour donné; du point X de l'axe de la Terre qui est le centre du parallèle, on abaissera une perpendiculaire indéfinie XTD & de l'autre extrémité C du rayon du parallèle, la perpendiculaire CK; du point K avec un rayon égal à GO, qui est le cosinus de l'arc AE ou le sinus de la hauteur du pole, on marquera un point d'intersection D, & l'on tirera une ligne KD, la partie interceptée ND sera la quantité dont il faudra avancer le style vers le point de midi, lorsque le Soleil aura une déclinaison septentrionale égale à EC.

Supposant toûjours le rayon $OE = 1$, on aura OX $=$ sin. déclin. & $OT = OX$ cos. O $=$ sin. décl. $\times$ cos. latit. mais $ND : OT :: KD$ ou $GO : KT$ ou MX, & à cause des triangles semblables GEO, MCX, $GO : MX$ $:: EO : CX :: 1 :$ cos. décl. donc $ND : OT :: 1 :$ cos. décl. ainsi $ND = \frac{OT}{\text{cos. décl.}} = \frac{\text{sin. décl. cos. latit.}}{\text{cos. décl.}} =$ tang. décl. cos. lat.

Donc la partie interceptée ND, est véritablement la même chose que la ligne CD (*fig. 1 & 3*), ou la quantité dont le style doit être avancé vers le midi au delà du centre du cadran, suivant la déclinaison de chaque jour.

La *figure 5* représente un cadran analemmatique AB, sur une même platine que le cadran horizontal ordinaire CD qui lui tient lieu de boussole; la ligne ♑ ♋ marque les différentes positions du style qui doit être fixé verticalement en ♑ le 21 de Décembre, en ♈ le 21 de Mars, jour de l'équinoxe, en ♋ le 21 de Juin ou le jour du solstice d'été, & ainsi des autres points intermédiaires. Pour pouvoir donner au Lecteur un exemple dont le calcul ſoit exact & rigoureux, j'ajoûterai que ſi l'on diviſe en 1000 parties la demi-largeur du cadran depuis ♈ juſqu'à 6 heures, ou le demi-axe de l'ellipſe autour de laquelle ſont marquées les heures, la ligne ♈ ♋ ſera de 284 parties pour la latitude de Paris, au ſolſtice d'été, de même que la ligne ♈ ♑ au ſolſtice d'hiver; & les portions de cette même ligne pour le commencement des autres ſignes, ſeront de 134 & 242 des mêmes parties.

Ces quantités diminuent en approchant vers le nord, & ſe réduiroient enfin à zéro pour un Obſervateur qui ſeroit ſous le pole; ſous la latitude de 40 degrés, la quantité de 284 augmenteroit & ſeroit de 333, c'eſt-à-dire, un tiers de la demi-largeur du cadran; mais à 45 degrés, elle ſeroit de 307, & à 55 de 249 ſeulement.

A l'égard du demi petit axe *CN* (*fig. 1*) de l'ellipſe qui forme ce cadran, il eſt égal, comme nous l'avons dit, au ſinus de la latitude, qui eſt à Paris de 753; à 40 degrés de latitude, il ſeroit ſeulement de 643 degrés, à 45 degrés de 707, à 50 degrés de 766, à 55 degrés de 819: ſous le pole il deviendroit égal au grand axe lui-même, puiſque le cadran lui-même deviendroit un cercle, au lieu d'être une ellipſe: au contraire ſous l'équateur, le petit axe s'évanouiroit, & le cadran ſe réduiroit à une ligne droite. Le ſeul cas où les règles précédentes ceſſent d'avoir lieu arrive ſous l'équateur le jour où le Soleil ſe trouve auſſi dans l'équateur, car alors les
Fig. 3. lignes *DB* & *CL* étant confondues toute la journée, le cadran azimuthal ceſſe de marquer à moins que le ſtyle ne ſoit fixé à une longueur déterminée pour former un cadran de hauteur, mais ceci n'entre plus dans l'objet que nous nous ſommes propoſé d'éclaircir.

Si donc on entreprend de tracer le cadran analemmatique
Fig. 6. en grand dans un parterre, il faudra commencer par former un grand cercle *ABC*, on diviſera en 24 parties ſa circonférence, & ſon rayon *AD* en 100 parties, on prendra dans la direction de la méridienne la quantité de 753 parties pour former le demi-petit axe *DK* plus ou moins, ſuivant que le pays ſera

au

Fig. 1

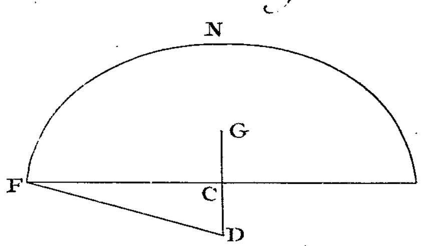


Fig. 2.

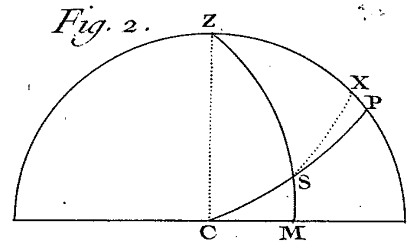


Fig. 3.

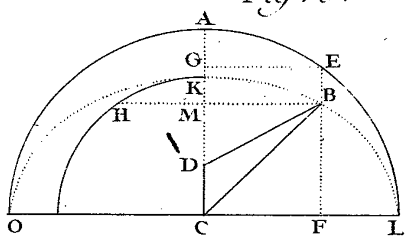


Fig. 4

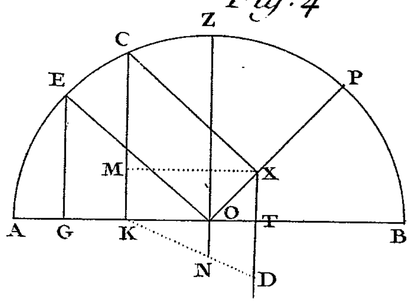


Fig. 5.

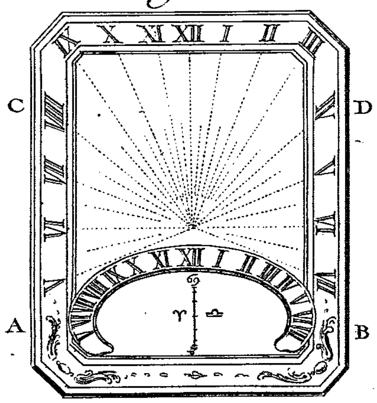
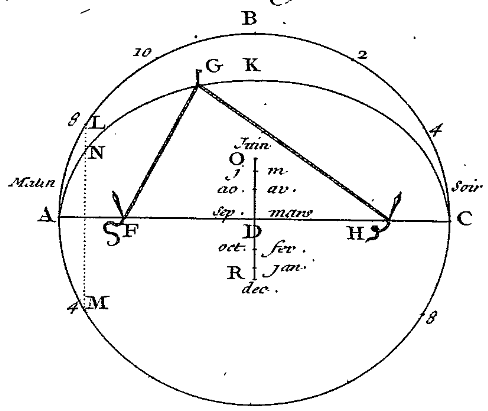


Fig. 6.



Ingram Sculp.

au nord ou au midi de Paris, il ne faudra que chercher dans des Tables de Trigonométrie ordinaire le sinus de la latitude du lieu.

On décrira une ellipse à la manière des Jardiniers avec un cordeau *FGH* fixé à deux piquets; pour diviser l'ellipse, il suffira de tendre des cordeaux sur les points de division du cercle. Par exemple *LM*, le point *N* où il coupera l'ellipse, sera le point horaire cherché, on portera de *D* vers *O*, & de *D* en *R* les nombres donnés ci-dessus 134, 242, 284 pour la latitude de Paris, & l'on aura la position du style pour le 21 de chaque mois, ces lignes doivent être diminuées d'environ une cinquantième partie pour chaque degré de latitude, en avançant vers le nord, & augmentées d'autant en avançant vers le midi, c'est-à-dire, pour les pays dont la latitude est moindre que celle de Paris. La Table suivante fait voir, pour différentes latitudes, la distance qu'il faut mettre entre le style & le centre du cadran pour le 21 de chaque mois, en supposant mille parties pour le rayon du cercle ou pour le demi-grand axe de l'ellipse; la dernière colonne fait voir quelle doit être la quantité du demi-petit axe.

HAUTEURS du Pole, ou Latitudes.	21 Février. 21 Avril. 21 Août. 21 Octobre.	21 Janvier. 21 Mai. 21 Juillet. 21 Novemb.	21 Juin. 21 Décemb.	MOITIÉ du petit axe.
30d	176d	318d	376d	500d
35.	166.	301.	356.	574.
40.	156.	282.	333.	643.
45.	144.	260.	307.	707.
50.	131.	236.	279.	766.
55.	117.	210.	249.	819.